école d'ingénieurs du canton de Vaud (*eivd*)

Département d'électricité et d'informatique

Filière Electronique

Département des systèmes industriels et des microtechniques

Filière Microtechnique

REGULATION AUTOMATIQUE

Ecole d'ingénieurs du Canton de Vaud

institut d'Automatisation industrielle

Michel ETIQUE, février 2004, Yverdon-les-Bains

Table des matières

Fiches de cours

eivd Ecole d'ingénieurs du Canton de Vaud	***Régulation automatique***	Département: ***Electricité*** Filière: ***Electronique*** Orientation: ***Systèmes automatisés***

Semestre:	1	2	3	4	5	6	Total heures	*Contrôle continu*	*Propédeutique*	*Final*
					4		72	X	I ☐ II ☐	☐

Contrôle des connaissances

OBJECTIFS

a) Maîtriser les méthodes d'analyse des systèmes dynamiques linéaires et les appliquer aux processus industriels.
b) Pouvoir comprendre les problèmes spécifiques d'un système de régulation automatique.
c) Pouvoir formuler le cahier des charges d'un système de régulation automatique.
d) Etre apte à faire la synthèse de régulateurs classiques sur la base de spécifications de performances.

CONTENU (avec dotation approximative en %)

Introduction **10%**
- Exemples d'applications industrielles, définitions générales, régulateurs tout-ou-rien et proportionnel, notion de statisme et de stabilité, linéarité, régulation de correspondance et de maintien, principe de la régulation numérique.

Modélisation et simulation **20%**
- Fonction de transfert, modèle d'état. Systèmes fondamentaux. Schéma fonctionnel. Simulation à l'aide du logiciel MATLAB.

Caractéristiques et performances des systèmes asservis **20%**
- Fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée. Régulateur PID. Méthode de Ziegler-Nichols. Stabilité, rapidité, précision. Condition fondamentale de stabilité. Précision en régime permanent.

Analyse et synthèse fréquentielles **30%**
- Réponse harmonique, lieux de Nyquist et de Bode. Critère de Nyquist. Lieux de Bode en boucle fermée.
- Synthèse de régulateurs P, PI, PD et PID. Méthode de Bode. Compensation pôle-zéro. Régulateurs robustes.

Analyse dans le plan complexe **10%**
- Lieu d'Evans, marges de stabilité. Courbes équi-amortissement.

Analyse des systèmes non-linéaires **10%**
- Non-linéarités essentielles et accidentelles. Méthodes du premier harmonique et du plan de phase

FORME DE L'ENSEIGNEMENT: Cours en classe, exercices en classe et au laboratoire.

LIAISON AVEC D'AUTRES COURS:

***Préalable requis*:** Mathématique, mécanique rationnelle, physique, machines électriques, électronique, électrotechnique, programmation, traitement de signal.

***Préparation pour*:** Régulation numérique, laboratoire de régulation automatique, cours d'entraînements réglés et d'électronique de puissance, projets de semestre et de diplôme.

Voir aussi: Laboratoire de régulation automatique.

SUPPORT DE COURS: Polycopié, exercices avec corrigés détaillés, logiciels d'aide à l'enseignement.

BIBLIOGRAPHIE:
Régulation automatique, L. Maret, 1987, PPUR.
Modern Control Systems, Dorf et Bishop, 1995, Addison-Wesley.

10.09.1997/MEE-St (MEE EE régu. automatique)

eivd Ecole d'ingénieurs du Canton de Vaud	***Régulation automatique***	Département:	***Electricité***
		Filière:	***Electronique***
		Orientation:	***Systèmes intégrés***

Semestre:	1	2	3	4	5	6	Total heures	*Contrôle continu*	*Propédeutique*	*Final*
	☐	☐	☐	☐	4	☐	72	X	I☐ II☐	☐

Contrôle des connaissances

OBJECTIFS

a) Maîtriser les méthodes d'analyse des systèmes dynamiques linéaires et les appliquer aux processus industriels.
b) Pouvoir comprendre les problèmes spécifiques d'un système de régulation automatique.
c) Pouvoir formuler le cahier des charges d'un système de régulation automatique.
d) Etre apte à faire la synthèse de régulateurs classiques sur la base de spécifications de performances.

CONTENU (avec dotation approximative en %)

Introduction **10%**
- Exemples d'applications industrielles, définitions générales, régulateurs tout-ou-rien et proportionnel, notion de statisme et de stabilité, linéarité, régulation de correspondance et de maintien, principe de la régulation numérique.

Modélisation et simulation **20%**
- Fonction de transfert, modèle d'état. Systèmes fondamentaux. Schéma fonctionnel. Simulation à l'aide du logiciel MATLAB.

Caractéristiques et performances des systèmes asservis **20%**
- Fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée. Régulateur PID. Méthode de Ziegler-Nichols. Stabilité, rapidité, précision. Condition fondamentale de stabilité. Précision en régime permanent.

Analyse et synthèse fréquentielles **30%**
- Réponse harmonique, lieux de Nyquist et de Bode. Critère de Nyquist. Lieux de Bode en boucle fermée.
- Synthèse de régulateurs P, PI, PD et PID. Méthode de Bode. Compensation pôle-zéro. Régulateurs robustes.

Analyse dans le plan complexe **10%**
- Lieu d'Evans, marges de stabilité. Courbes équi-amortissement.

Analyse des systèmes non-linéaires **10%**
- Non-linéarités essentielles et accidentelles. Méthodes du premier harmonique et du plan de phase

FORME DE L'ENSEIGNEMENT: Cours en classe, exercices en classe et au laboratoire.

LIAISON AVEC D'AUTRES COURS:

***Préalable requis*:** Mathématique, mécanique rationnelle, physique, machines électriques, électronique, électrotechnique, programmation, traitement de signal.

***Préparation pour*:** Régulation numérique, laboratoire de régulation automatique, cours d'entraînements réglés et d'électronique de puissance, projets de semestre et de diplôme.

Voir aussi: Laboratoire de régulation automatique.

SUPPORT DE COURS: Polycopié, exercices avec corrigés détaillés, logiciels d'aide à l'enseignement.

BIBLIOGRAPHIE:

Régulation automatique, L. Maret, 1987, PPUR.
Modern Control Systems, Dorf et Bishop, 1995, Addison-Wesley.

10.09.1997/MEE-St (MEE EE régu. automatique)

Préambule

Le présent polycopié de *régulation automatique* n'est au stade actuel qu'un condensé de notes de cours. Il s'inspire très largement de la référence [1].

Pour la filière électronique, ce cours de régulation automatique est enseigné pendant un demi-semestre, à raison de 8 périodes par semaine pour un total de 72 périodes. Environ la moitié de celles-ci est consacrée aux exercices, dont les données sont fournies séparément et pour lesquels un corrigé est distribué. Ce cours est complété par des travaux de laboratoire (*laboratoire de régulation automatique*), réparti sur un semestre (36 périodes au total).

L'orientation systèmes automatisés de la filière électronique voit sa formation en automatique complétée par un cours de *régulation numérique*, donné ensuite avec la même dotation horaire (semestre d'hiver) complété par un laboratoire (*laboratoire de régulation numérique*, 72 périodes, semestre d'été).

Les différents documents distribués sont en principe disponibles sous forme informatique sur le site

http ://iai1.eivd.ch

où tous les fichiers, y compris les diapositives de présentation, sont accessibles (suivre le lien Regulation automatique)

Pour le travail au laboratoire (exercices et expériences), les étudiants recevront les nom d'utilisateur, mot de passe et nom de domaine nécessaire pour se connecter sur le serveur iAi.

On trouvera à ces références les différents chapitres en format `pdf`, ainsi que la plus grande partie des figures (`*.dsf`, `*.eps`), réalisées avec le logiciel Micrografx Designer, dont l'*eivd* a la licence de site. Lorsque le fichier `pdf` du cours est ouvert, il est possible de télécharger les figures au format `eps` en cliquant sur celles-ci. Les simulations sont faites avec les logiciels MATLAB et SysQuake, qui seront abondamment utilisés dans le cadres des exercices et laboratoires. Un certain nombre des fichiers de simulation sont également accessibles en cliquant sur leur nom dans le document `pdf`.

Chapitre 1

Introduction à la régulation automatique

1.1 Régulation automatique : tentative de définition

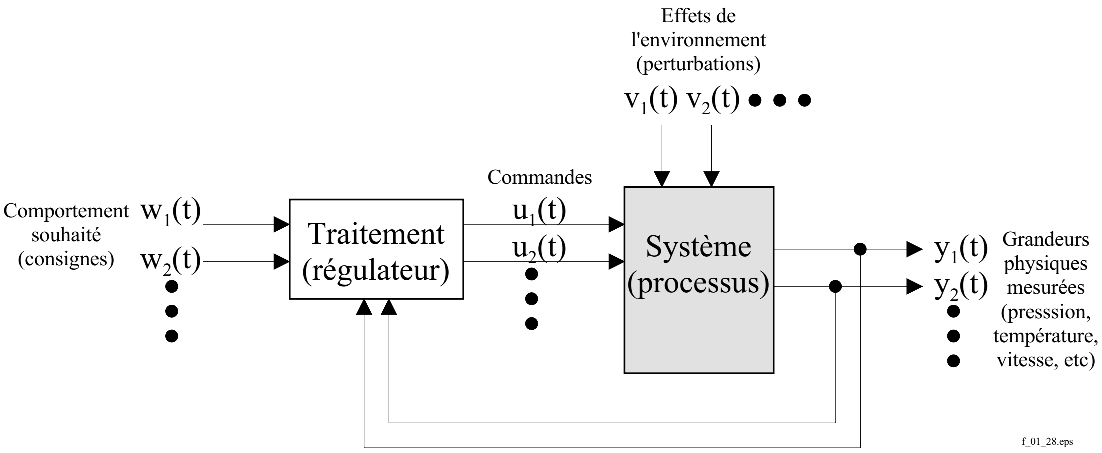


FIG. 1.1 – Structure d'un système de régulation automatique : le fonctionnement de l'installation requiert que certaines grandeurs physiques $y_1(t)$, $y_2(t)$, ... d'un système aient un comportement fixé par les *consignes* $w_1(t)$, $w_2(t)$, ..., malgré la présence de *perturbations* $v_1(t)$, $v_2(t)$, ... d'origine externe et imprévisibles. Dans ce but, $y_1(t)$, $y_2(t)$, ... sont mesurées, traitées puis une action est entreprise sur le système au moyen des *commandes* $u_1(t)$, $u_2(t)$, ... (f_01.dsf).

La régulation automatique (automatic control, Regelungstechnik) est la technique de l'ingénieur offrant les méthodes et les outils nécessaires à la prise de contrôle d'une ou plusieurs grandeurs physiques d'un système en vue d'en imposer le comportement. Les grandeurs physiques, ou *signaux* (vitesse, température, pression, courant, etc), doivent être mesurées afin de vérifier leur état puis de déterminer à l'aide d'un traitement approprié l'action à entreprendre sur le système ou *processus* (installation de production, robot, alimentation électronique stabilisée, disque dur, etc) pour qu'elles se comportent comme souhaité (figure 1.1 page précédente). Avec le qualificatif *automatique*, on admet qu'aucune intervention manuelle n'est nécessaire atteindre cet objectif.

Le comportement des grandeurs contrôlées $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\ldots$ peut/doit en général satisfaire plusieurs critères :

- on souhaite qu'une certaine grandeur physique (p.ex. vitesse, courant électrique, température) ait une valeur moyenne donnée en régime permanent, malgré l'influence de l'environnement (*perturbations*) ;
- cette même grandeur physique doit passer d'une valeur à une autre en un temps donné, voire avec un profil de variation imposé.

Fait remarquable, les méthodes de l'automatique offrent donc la possibilité de modifier le comportement statique et dynamique d'une ou plusieurs grandeurs physiques d'un processus, afin qu'elles évoluent conformément aux exigences de l'application (figure 1.2 page suivante). D'un certain point de vue, ces méthodes contribuent significativement à augmenter la valeur ajoutée aux produits, en offrant les moyens d'améliorer les performances de ceux-ci.

En s'appuyant fondamentalement sur la technique de la **contre-réaction** (feedback, Rückführung), les méthodes de l'automatique permettent de traiter des situations où interviennent des systèmes

- intrinsèquement lents devant être rendus plus rapides (figure 1.2 page ci-contre) ;
- impossibles à contrôler manuellement (systèmes très rapides (ayant des constantes de temps $\tau < 1\,[\mathrm{s}]$), très précis (1%)) ;
- difficilement contrôlables manuellement (sustentation et lévitation magnétiques, aviation, etc) devant être rendus stables afin d'être utilisables.

Les applications de la régulation automatique se rencontrent donc dans tous les systèmes dont une (ou plusieurs) grandeur physique (température, pH, débit, pression, courant, vitesse, force, altitude, profondeur, orientation, etc) doit correspondre à une valeur prescrite, la *consigne*, laquelle pouvant être variable, et cela sans intervention manuelle, i.e. de manière complètement automatique.

1.2 Exemples introductifs

On présente ci-après quelques exemples simples de systèmes de régulation automatique. Ceux-ci sont également appelés *systèmes asservis*.

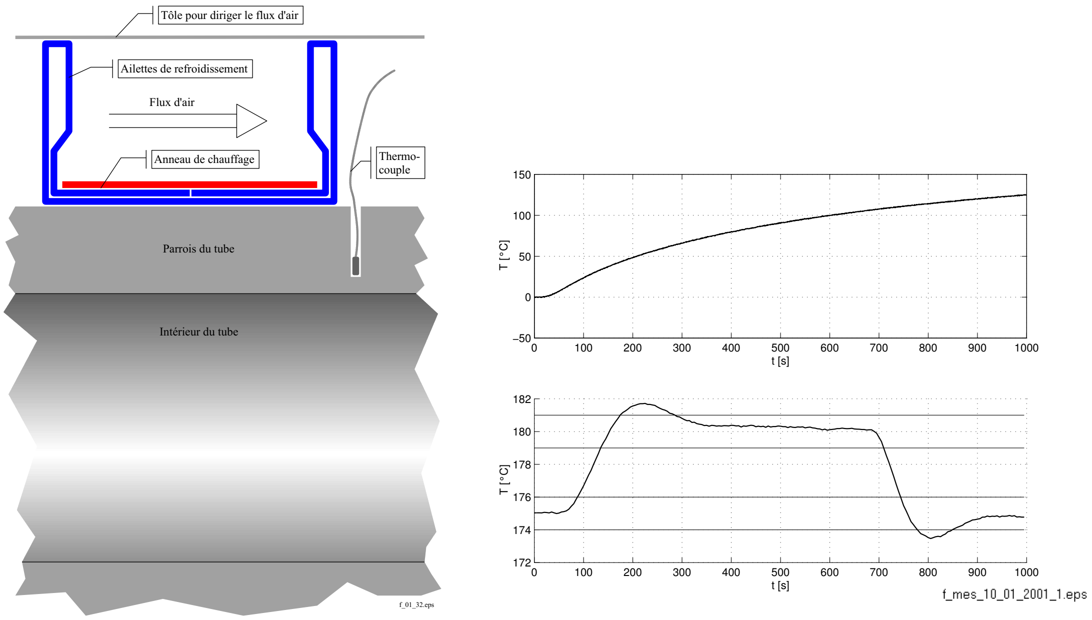


Fig. 1.2 – Régulation de la température d'un processus industriel : en haut, la réponse indicielle du système seul (température T en fonction du temps t suite à l'application d'un saut de puissance thermique), en bas la réponse indicielle en régulation automatique (suite à l'application d'un saut de consigne de température). On observe que l'on parvient, grâce à la contre-réaction, à rendre le système beaucoup plus rapide ! (mes_10_01_2001.m)

1.2.1 Régulation automatique de température

Régulation manuelle de température : schéma technologique

La figure 1.3 page suivante représente schématiquement une installation permettant de faire une régulation manuelle de température. L'opérateur agit sur un potentiomètre pour ajuster la tension de commande de l'amplificateur de puissance, lequel alimente un corps de chauffe électrique. Comme les éléments dessinés représentent assez explicitement des dispositifs dépendant de la réalisation technique de l'installation (par exemple, corps de chauffe électrique et non chauffage à gaz), on parle de *schéma technologique*.

Régulation manuelle de température : représentation par schéma fonctionnel

On peut représenter le principe de la régulation manuelle de température par un *schéma fonctionnel*, i.e. découper logiquement la fonction globale "régulation manuelle de température" en une série de sous-fonctions ou composants plus simples, en indiquant la fonction réalisée ainsi que la nature de l'information

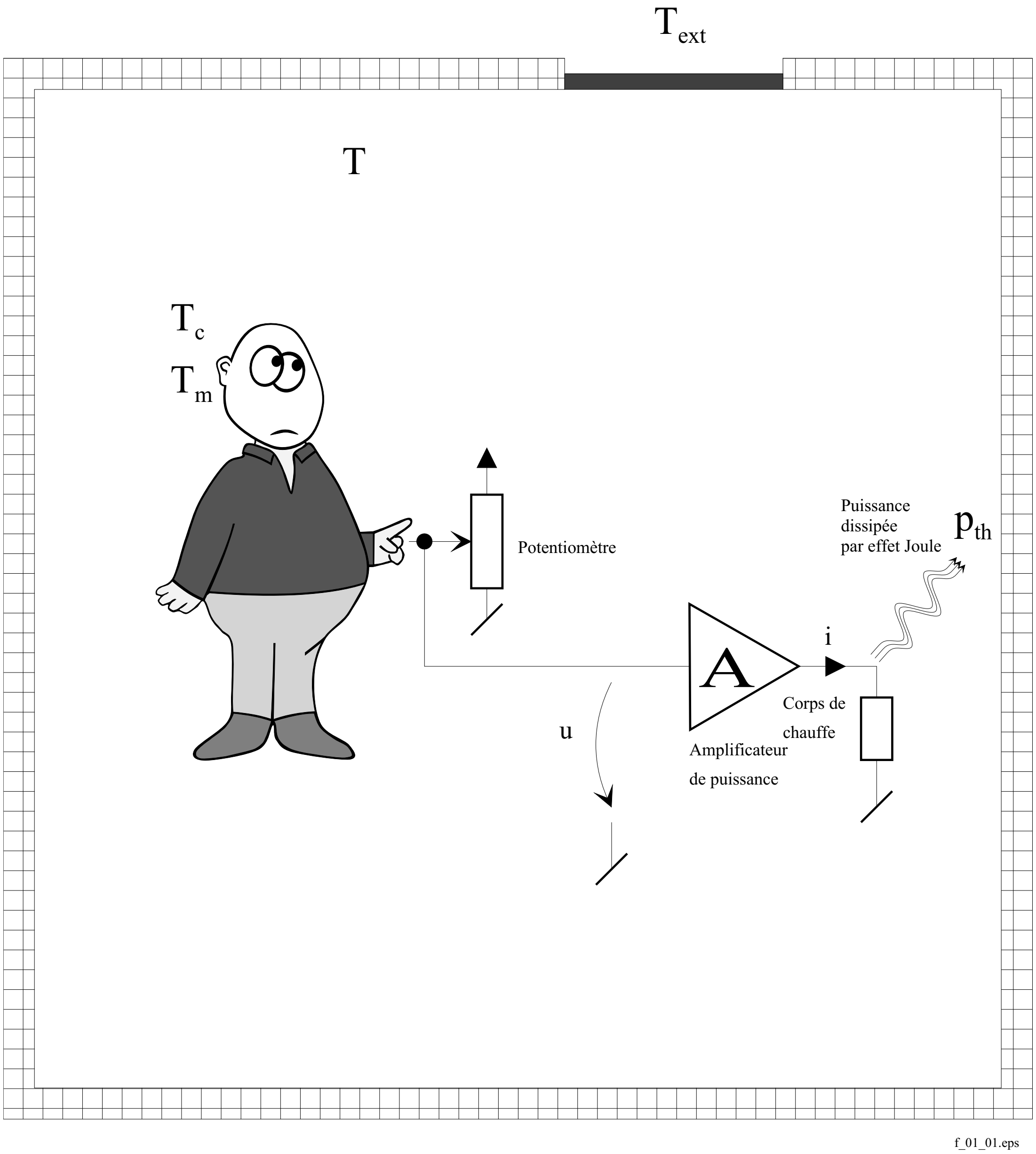


FIG. 1.3 – Régulation manuelle de température : T_c est la température de consigne, i.e. la température souhaitée, T la température effective en [°C]. L'opérateur souhaite que T, du moins la température T_m qu'il perçoit sensoriellement, coïncide avec T_c. Il agit pour cela sur le potentiomètre afin d'ajuster la puissance thermique dissipée par effet Joule dans la résistance du corps de chauffe (f_01.dsf).

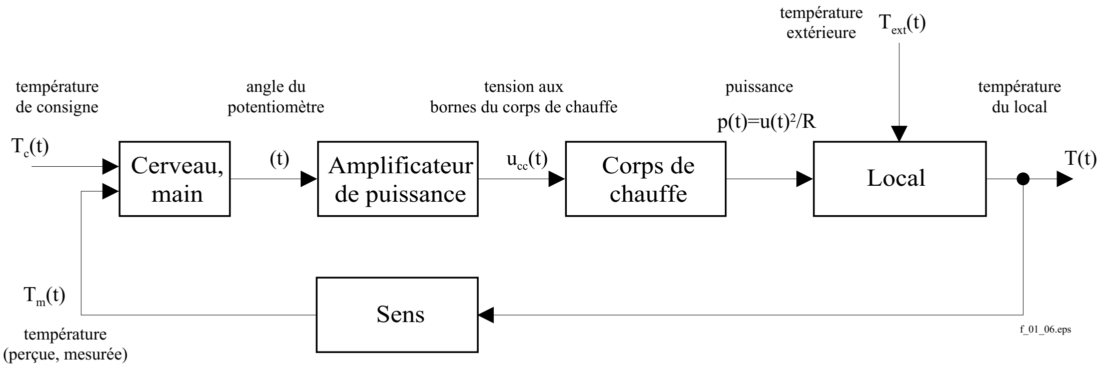


FIG. 1.4 – Représentation par schéma fonctionnel du mode de fonctionnement de l'opérateur en cas de régulation manuelle : l'opérateur compare la température de consigne T_c, i.e. la température souhaitée, avec la température mesurée (perçue) T_m, image aussi fidèle que possible de la température réelle T [°C] (cela dépend de la qualité du capteur : dans cet exemple, c'est opérateur qui perçoit sensoriellement la température T). En fonction du résultat de la comparaison, l'opérateur agit sur le potentiomètre (il le tourne d'un angle θ), ce qui modifie la tension u_{cc} aux bornes du corps de chauffe, la puissance instantanée dissipée $p(t)$ et finalement la température T du local (f_01.dsf).

(signal) entrant et sortant de chacune d'entre-elles. En se livrant à cet exercice pour le schéma technologique de la figure 1.3 page ci-contre, on peut a priori identifier les fonctions suivantes :

- volume d'air du local (entrée puissance de chauffage, sortie température) ;
- corps de chauffe (entrée tension électrique, sortie puissance de chauffage) ;
- amplificateur de puissance (entrée commande de tension, sortie tension amplifiée en puissance) ;
- mesure de température (entrée température, sortie estimation de température) ;
- traitement de la mesure et action sur le potentiomètre.

Graphiquement, le schéma fonctionnel peut ainsi prendre la forme de la figure 1.4. On observe que le schéma fonctionnel de la figure 1.4 fait apparaître une boucle : la température mesurée T_m apparaît en effet :

- au **départ** de l'action sur le potentiomètre : $\theta(t)$ dépend de $T_m(t)$;
- également comme **conséquence** de cette action : $T_m(t)$ dépend de $\theta(t)$.

On dit que la température mesurée T_m est **contre-réactionnée**. Le système de la figure 1.4 présente ainsi une contre-réaction[1].

[1] On dit aussi retro-action. En anglais : feedback. En allemand : Rückführung

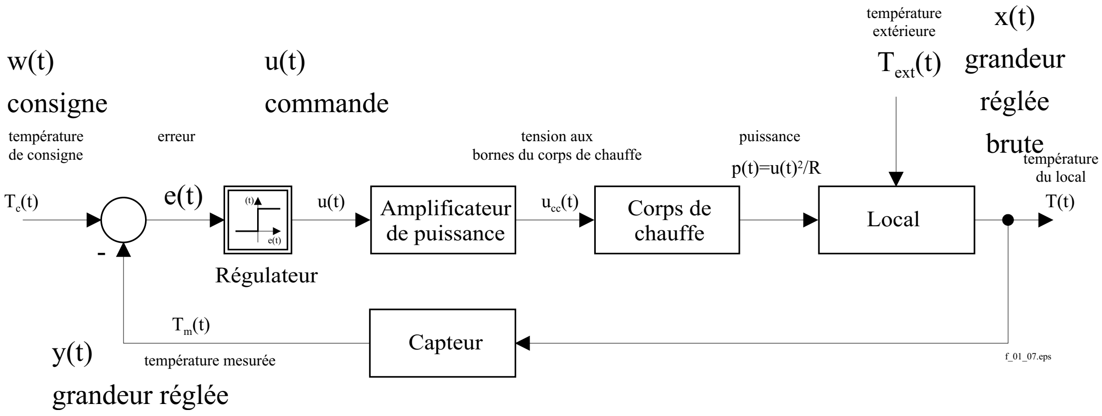


FIG. 1.5 – Représentation par schéma fonctionnel du mode de fonctionnement d'une régulation automatique de température (f_01.dsf).

Adaptation du principe de régulation manuelle en vue d'une automatisation

Il y a plusieurs raisons justifiant le remplacement de l'opérateur par un système entièrement automatique :

- augmentation de la fiabilité et de la répétabilité ;
- augmentation de la rapidité ;
- diminution des coûts ;
- garantie de la sécurité de l'opérateur (lorsque celui devrait par exemple opérer dans une atmosphère de travail explosive ou toxique, etc) ;
- souvent, le système est trop rapide pour être géré par manuellement (entraînements réglés, etc) ;
- amélioration de la sécurité de l'installation elle-même.

Se basant sur les schémas technologique et fonctionnel des figures 1.3 page 14 et 1.4 page précédente, on peut les transformer en vue de rendre la régulation de température complètement automatique (figures 1.6 page ci-contre et 1.5).

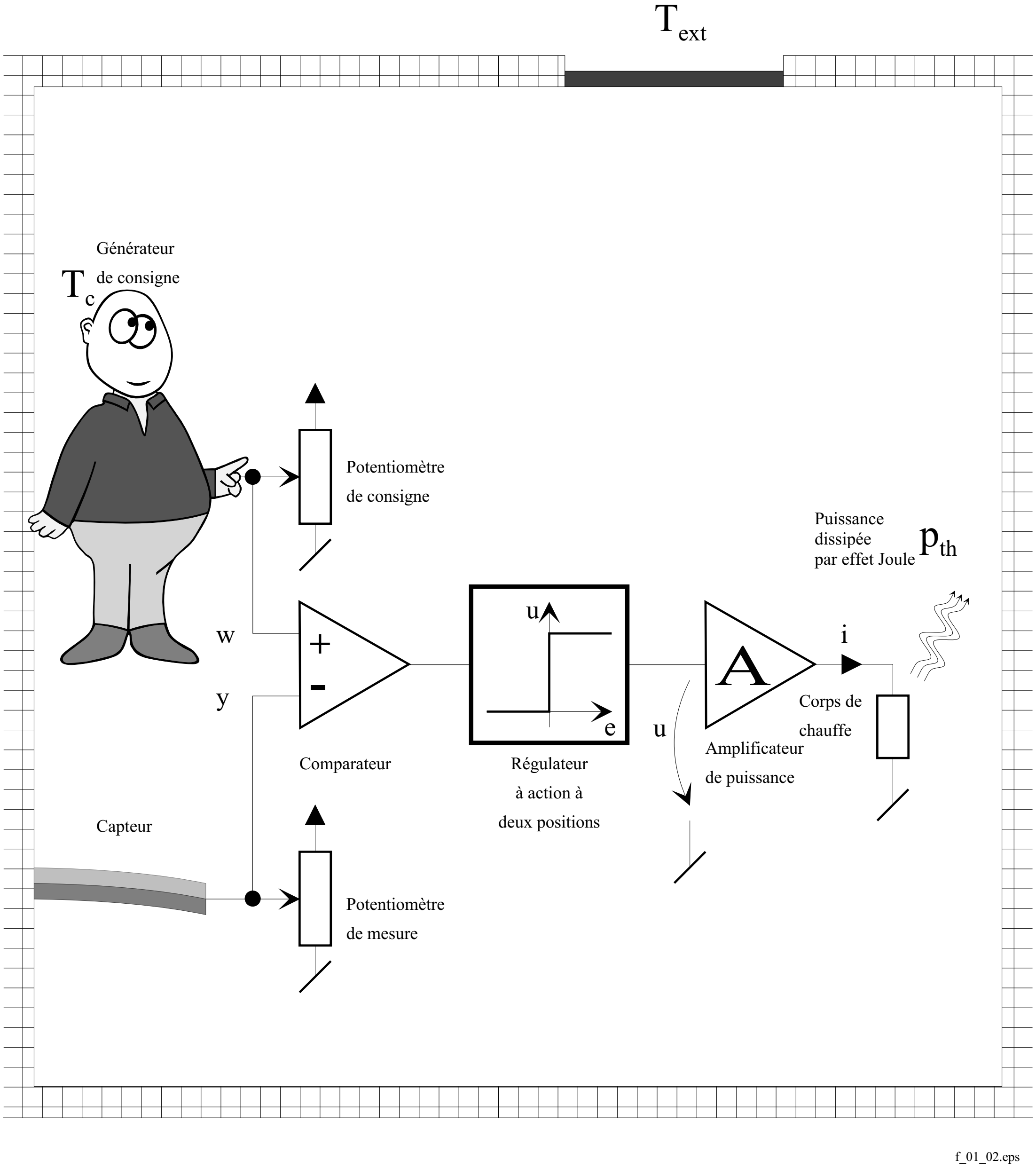


FIG. 1.6 – Schéma technologique d'une régulation automatique de température : le rôle de l'opérateur se limite maintenant à fixer la consigne de température T_c, la comparaison avec la température mesurée T_m par un capteur ad hoc (ici un bilame) étant effectuée par un dispositif appelé **régulateur** qui se charge d'agir sur le corps de chauffe. Ici le régulateur a un comportement de type tout-ou-rien, que l'on nomme parfois *régulateur à action à deux positions* : si l'erreur de température est en-dessous d'une certaine limite, on impose 0 [V] aux bornes du corps de chauffe, sinon, s'il fait trop froid, on applique la tension maximale (f_01.dsf).

1.2.2 Régulation automatique de la vitesse d'un moteur DC à excitation séparée constante

Des applications où une régulation de vitesse est nécessaire sont par exemple :
- la broche d'une machine-outil, afin de garantir la bonne vitesse de coupe ;
- le disque dur d'un ordinateur ;
- l'aide à la conduite de véhicules automobiles ("tempomat", voir exercice) ;
- installation d'impression des journaux : le papier doit défiler devant les rouleaux encreurs (rouge, vert, bleu) à une vitesse déterminée.

Dans l'exemple ci-dessous, le but de la régulation de vitesse de l'arbre d'un moteur à courant continu, manuelle ou automatique, est de garantir que la vitesse $\omega\ \left[\frac{\mathsf{rad}}{\mathsf{s}}\right]$ corresponde à la vitesse de consigne ω_c, i.e. la vitesse souhaitée, malgré la présence de couple résistant T_{res} [N · m].

Régulation manuelle

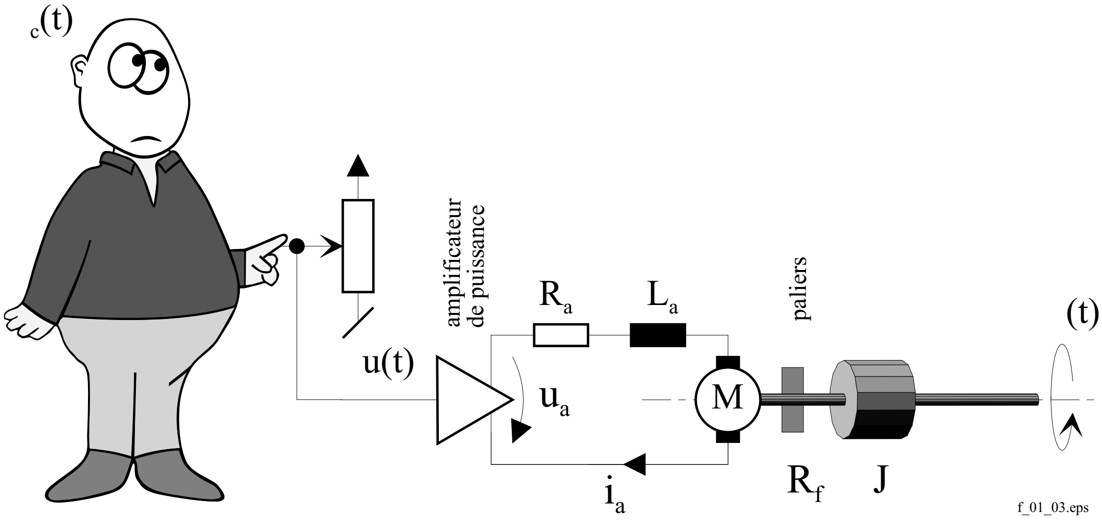


FIG. 1.7 – Régulation manuelle de la vitesse d'un moteur DC : l'opérateur estime (mesure) la vitesse de rotation $\omega\ \left[\frac{\mathsf{rad}}{\mathsf{s}}\right]$, la compare avec la vitesse de consigne ω_c et ajuste la tension u_a aux bornes de l'induit par le biais du potentiomètre. Pour la mesure de vitesse, il peut bien sûr disposer d'un appareil ad hoc (f_01.dsf).

La régulation manuelle de vitesse de la figure 1.7 voit l'opérateur agir sur la tension aux bornes du moteur DC afin de tendre à augmenter ou à diminuer sa vitesse, selon la comparaison entre la vitesse souhaitée ω_c et la mesure/l'estimation de la vitesse effective $\omega\ \left[\frac{\mathsf{rad}}{\mathsf{s}}\right]$. En modifiant la tension aux bornes du moteur, la caractéristique statique couple-vitesse est en effet modifiée, selon les courbes de la figure 1.8 page suivante.

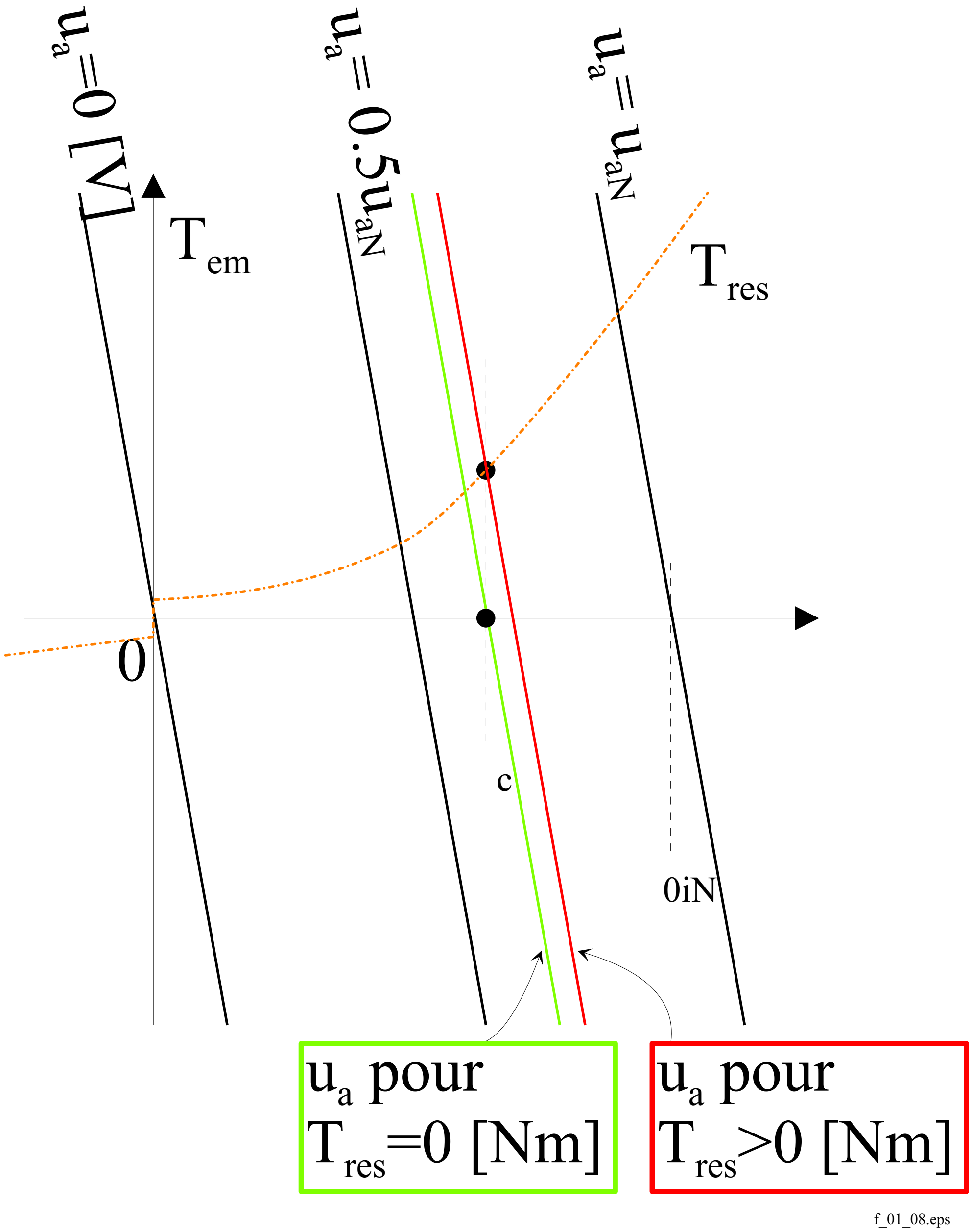


FIG. 1.8 – Caractéristique couple (T_{em} [N·m])-vitesse (ω $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$), régime permanent constant, d'un moteur DC à excitation séparée constante : on observe que la vitesse de rotation ω peut être ajustée en modifiant la tension u_a aux bornes de l'induit. Pour qu'elle corresponde à ω_c, il faut que la tension soit ajustée à des valeurs différentes selon le niveau de couple résistant (frottement sec et visqueux, etc) : ici sont illustrés les cas où $T_{res} = 0\,[\text{N}\cdot\text{m}]$ et $T_{res} > 0\,[\text{N}\cdot\text{m}]$. Le symbole T est utilisé ici comme étant la première lettre de "torque", i.e. *couple* en anglais (f_01.dsf).

Régulation automatique

Régulateur à action à 2 positions L'automatisation de la régulation de vitesse présentée nécessite la mise en place d'un capteur de vitesse délivrant un signal $y(t) = \omega_m(t)$ prenant le plus souvent la forme d'une tension électrique proportionnelle à $\omega(t)$. Un dispositif reproduisant si possible le comportement de l'opérateur doit être construit. Dans une première version (figure 1.9), la stratégie pourrait être :

- si $\omega_c - \omega_m > 0$ alors $u = +u_{\max}$
- si $\omega_c - \omega_m < 0$ alors $u = -u_{\max}$

L'implantation de cettre stratégie de commande s'effectue dans le **régulateur**, qui porte ici le nom de *régulateur à action à 2 positions*, ou *régulateur tout-ou-rien*. La figure 1.10 page suivante montre les résultats de la simulation d'une

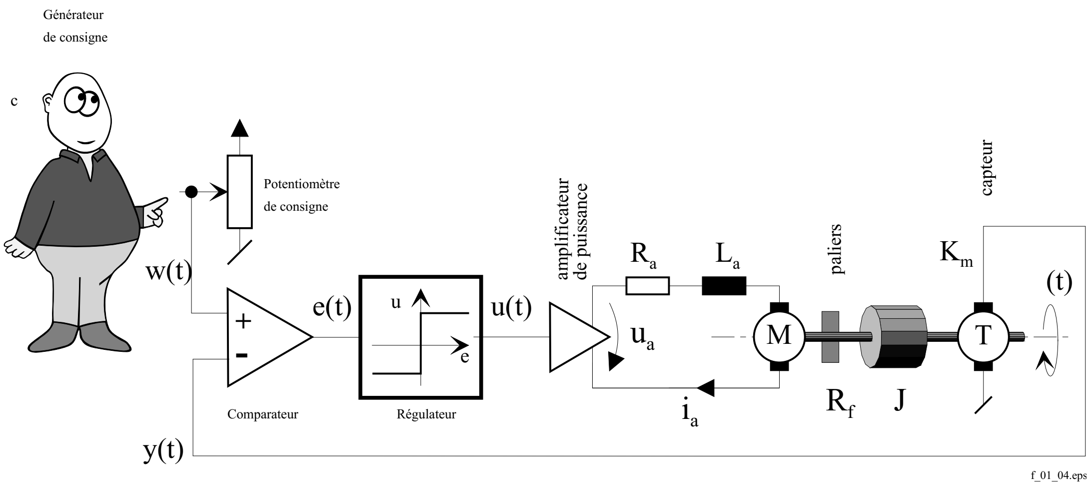


FIG. 1.9 – Régulation automatique de la vitesse d'un moteur DC : l'opérateur est remplacé par un régulateur, ici de type à action à deux positions. La mesure $y(t)$ de la vitesse de rotation ω est réalisée au moyen d'un capteur (une dynamo-tachymétrique dans le cas illustré). La mesure $y(t)$ est contre-réactionnée et comparée à la consigne $\omega_c(t) = w(t)$, l'erreur $e(t) = w(t) - y(t)$ est construite et détermine l'action, i.e. la commande $u(t)$ que le régulateur va entreprendre en vue de l'annuler (f_01.dsf).

telle installation : sans surprise, on observe que la tension de commande $u(t)$ oscille entre ses 2 seuls états possibles $\pm u_{\max}$. Cela provoque une suite continue de changements de signe de l'accélération et ainsi une oscillation de la vitesse autour de sa valeur finale $\omega_\infty = 1$. La dérivée de la vitesse, i.e. l'accélération, changeant de signe à fréquence élevée, la mécanique peut en souffrir (usure prématurée, augmentation des jeux de transmissions, etc). D'un point de vue électrique, les pointes de courants provoquées par des changements brusques de la tension de

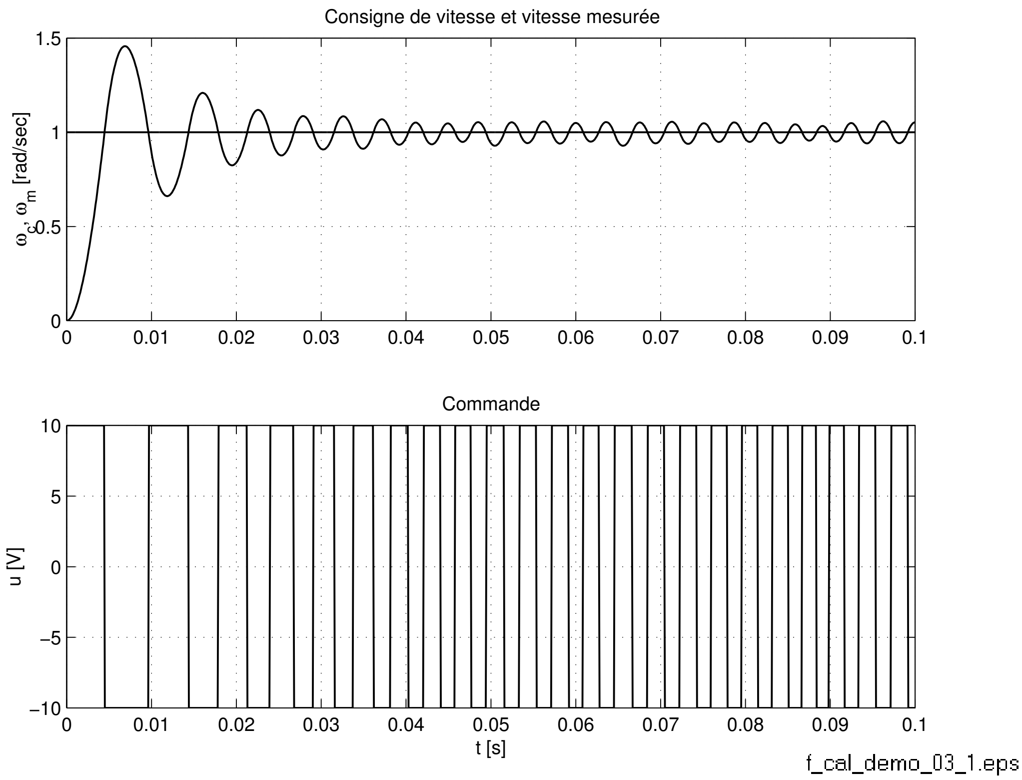


Fig. 1.10 – Régulation automatique de la vitesse d'un moteur DC, avec régulateur à action à deux positions (`Demo_03.mdl, cal_Demo_03.m`). La mesure ω_m de la vitesse de rotation ω coïncide, en régime permanent constant, avec la consigne ω_c, qui a ici la forme d'un saut unité, mais au prix d'une commande u commutant à une fréquence tendant vers l'∞ (demo_03.m).

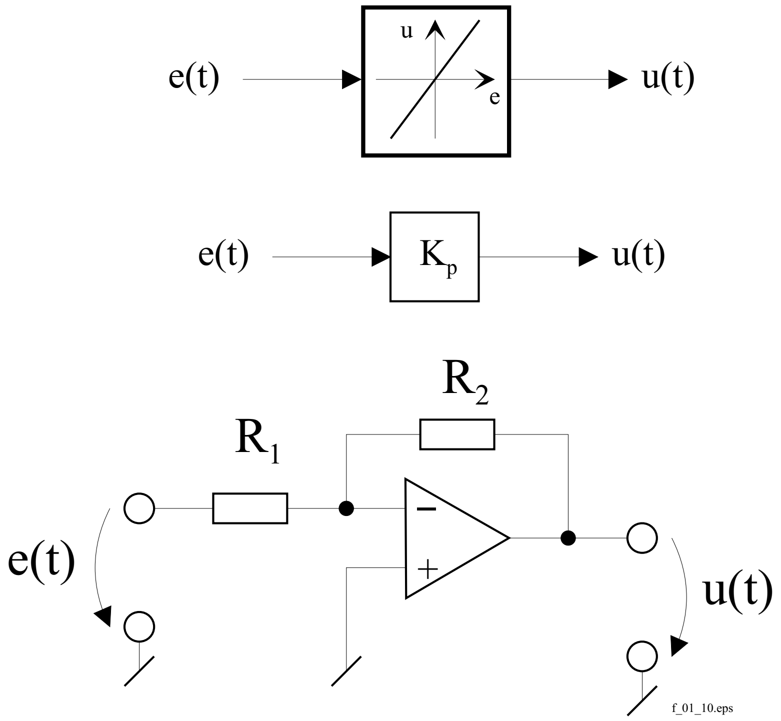


Fig. 1.11 – Schéma fonctionnel d'un régulateur P et schéma de principe (schéma technologique) de sa réalisation électronique (f_01.dsf).

commande peuvent endommager le moteur si celui-ci n'est pas assez selfique alors qu'un échauffement excessif par effet Joule des enroulements est à redouter.

Régulateur à action proportionnelle Une alternative au régulateur à action à deux positions consiste à utiliser un *régulateur à action proportionnelle*, lequel applique une commande $u(t)$ proportionnelle à l'erreur $e(t)$. On l'appelle *régulateur P* :

$$\boxed{u(t) = K_p \cdot e(t)}$$

Les figures 1.12 page ci-contre et 1.13 page suivante montrent respectivement le schéma technologique de l'installation ainsi que les résultats de la simulation. Si les oscillations de vitesse ont disparu et la commande est notablement plus douce qu'avec un régulateur à action à 2 positions, on doit en revanche constater que la vitesse mesurée ω_m n'atteint pas exactement la consigne. Ce problème sera examiné au § 1.5.2 page 32.

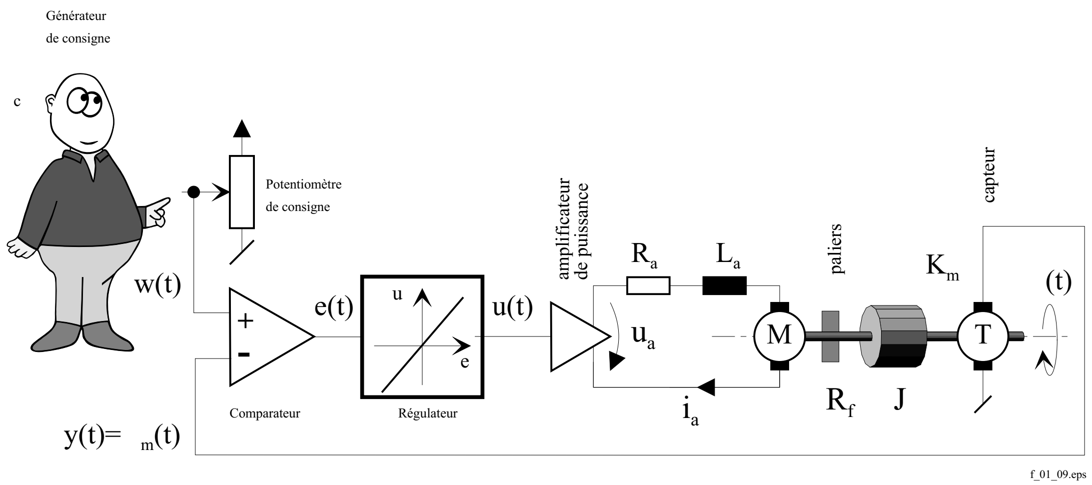


FIG. 1.12 – Régulation automatique de la vitesse d'un moteur DC : le régulateur est ici de type proportionnel, ce qui signifie que la commande $u(t)$ délivrée par le régulateur est proportionnelle à l'erreur $e(t)$ (f_01.dsf).

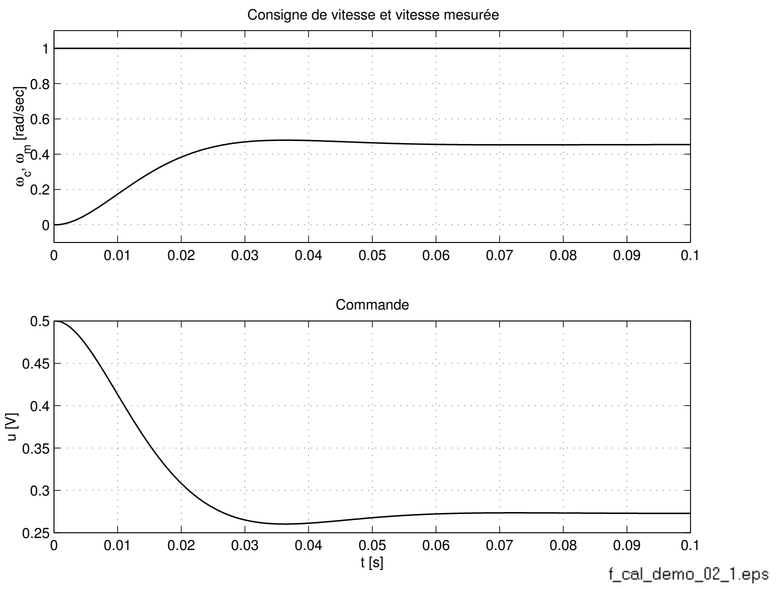


FIG. 1.13 – Régulation automatique de la vitesse d'un moteur DC, avec régulateur P, $K_p = 0.5$ (`Demo_02.mdl, cal_Demo_02.m`). La commande ne varie pas aussi brutalement qu'avec un régulateur à action à deux positions, mais la grandeur réglée (mesure) ω_m ne coïncide pas parfaitement avec la consigne ω_c en régime permanent constant. Il subsiste ce qu'on appelle une **erreur statique** de valeur $E_\infty \approx 55\%$ (demo_02.m).

1.3 Eléments et signaux caractéristiques d'un système de régulation automatique

Par les quelques exemples introductifs du paragraphe précédent, plusieurs termes nouveaux sont apparus. La figure 1.14 les reprend dans le cadre d'un système de régulation automatique présenté sous forme générale, où apparaissent des blocs fonctionnels ainsi que des signaux.

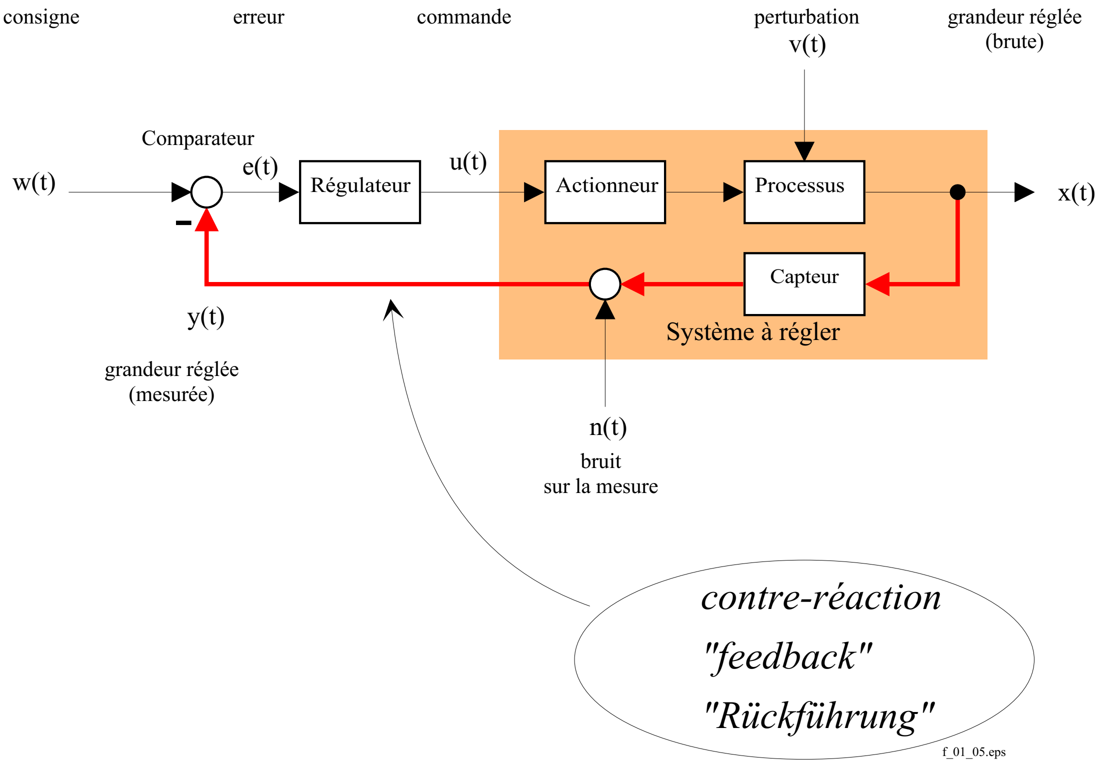


Fig. 1.14 – Schéma fonctionnel mettant en évidence les éléments et signaux caractéristiques d'un système de régulation automatique (f_01.dsf).

Les sous-systèmes ainsi que les signaux intervenant dans la figure sont détaillés dans les paragraphes ci-après.

1.3.1 Blocs fonctionnels et sous-systèmes

On distingue essentiellement 4 sous-systèmes :

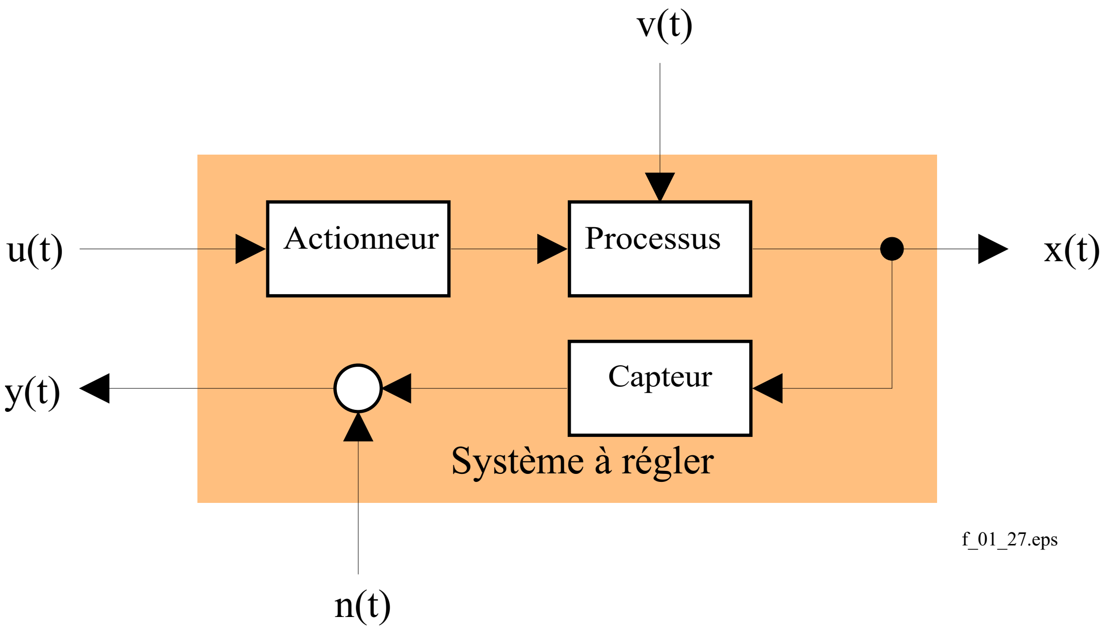


FIG. 1.15 – Système à régler (f_01.dsf).

Elément	Fonction
Comparateur	Construit le signal d'erreur $e(t) = w(t) - y(t)$
Régulateur	Traite le signal d'erreur $e(t)$ et en déduit le signal de commande $u(t)$ destiné à diminuer $e(t)$
Amplificateur de puissance	Amplifie en puissance le signal de commande $u(t)$ de façon à ce qu'il soit applicable au processus
Processus	Installation à asservir
Capteur	Forme une image $y(t)$ aussi fidèle que possible de la grandeur réglée brute $x(t)$

TAB. 1.1 – Blocs fonctionnels et sous-systèmes.

On note qu'avec le schéma adopté, le **système à régler** comprend tous les éléments (actionneur, processus, capteur, etc) se trouvant entre la commande $u(t)$ délivrée par le régulateur et la grandeur réglée (mesurée) $y(t)$, y compris le capteur (figure 1.15).

1.3.2 Signaux

Les signaux intervenant dans le schéma général d'un système de régulation automatique sont résumés ci-dessous.

Signal	**Notation**	**Remarques**
Consigne	$w(t)$	Signal à poursuivre, à caractère généralement déterministe, par opposition à aléatoire : ce signal est défini pour une application donnée
Grandeur réglée brute	$x(t)$	Grandeur physique réglée, dans son unité physique propre ($\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$, [°C], etc). Seule une image peut en être obtenue, par l'intermédiaire d'un capteur
Grandeur réglée mesurée	$y(t)$	Image de la "vraie" grandeur réglée fournie par le capteur, i.e. image de la grandeur réglée brute $x(t)$. C'est la seule information dont dispose le régulateur, lequel asservit donc en réalité la grandeur réglée mesurée $y(t)$ et non directement la grandeur réglée brute $x(t)$. C'est pourquoi la qualité de la mesure (capteur et traitement lui étant associé) est primordiale en automatique
Commande	$u(t)$	Signal délivré par le régulateur au système à régler. Ce signal doit normalement tendre à faire diminuer l'erreur
Perturbation	$v(t)$	Signal aléatoire représentant les perturbations intervenant sur le système à régler
Bruit sur la mesure	$n(t)$	Signal aléatoire représentant le bruit intervenant sur la mesure ($n \Leftarrow$ **n**oise)
Erreur ou écart	$e(t)$	Différence entre consigne $w(t)$ et grandeur réglée $y(t)$: $e(t) = w(t) - y(t)$

TAB. 1.2 – Signaux principaux d'un système de régulation automatique.

Signaux d'entrée et signaux de sortie Les signaux d'entrée du système de régulation automatique sont les suivants :
- consigne $w(t)$ (plusieurs en régulation multivariable)
- perturbation $v(t)$ (perturbation de charge, pouvant être de différentes natures et intervenant à plusieurs endroits dans le système)
- bruit de mesure $n(t)$ (perturbation de signal), voir figure 1.16 page suivante

Pour les signaux de sortie, on a :
- grandeur réglée $y(t)$ (plusieurs en régulation multivariable)

Unités physiques des signaux Il est important de relever qu'un système de régulation automatique ne réalise pas directement l'asservissement de la grandeur réglée brute $x(t)$, mais bel et bien de l'image $y(t)$ donnée de celle-ci par le capteur. $y(t)$ est alors le plus souvent un signal ayant une autre nature physique que la grandeur réglée brute $x(t)$: pour des raisons d'implantation, l'unité physique de $y(t)$ est typiquement le [V]. Comme le régulateur effectue la comparaison de

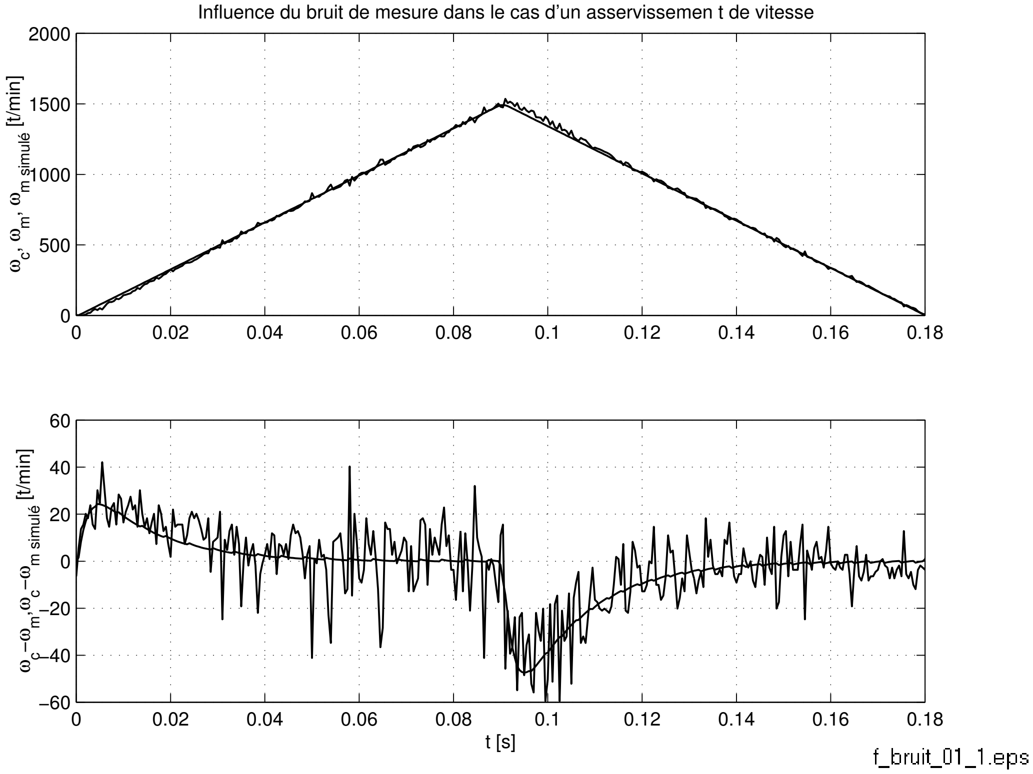


FIG. 1.16 – Visualisation du bruit de mesure dans le cas d'un asservissement de vitesse (`bruit_01.m`). La consigne de vitesse a la forme d'un triangle (accélération constante puis freinage-arrêt). On compare ici la vitesse réglée effective et sa simulation de façon à bien mettre en évidence le bruit (bruit_01.m).

$w(t)$ et de $y(t)$, il s'ensuit que la consigne $w(t)$ a impérativement la même unité physique que la grandeur réglée mesurée $y(t)$.

Signal	**Notation**	**Unité physique**	**Régulation de température**	**Régulation de vitesse**
Consigne	$w(t)$	Correspond à l'unité physique de la grandeur réglée $y(t)$ fournie par le capteur. Typiquement des [V] ou des [A]	$[T_c] = \mathrm{V}$	$[\omega_c] = \mathrm{V}$
Grandeur réglée mesurée	$y(t)$	Correspond à la nature du signal de sortie du capteur. Typiquement des [V]	$[T_m] = \mathrm{V}$	$[\omega_m] = \mathrm{V}$
Grandeur réglée brute	$x(t)$	Grandeur physique réglée, dans son unité	$[T] = °\mathrm{C}$	$[\omega] = \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$
Commande	$u(t)$	Correspond à l'unité physique du signal de sortie du régulateur, tel qu'il est réalisé. Typiquement des [V]	$[u] = \mathrm{V}$	$[u] = \mathrm{V}$
Perturbation	$v(t)$	Dépend de l'endroit où la perturbation intervient	$[v] = [\mathrm{W}]$	$[v] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$
Bruit sur la mesure	$n(t)$	Correspond à l'unité de $y(t)$	$[n] = \mathrm{V}$	$[n] = \mathrm{V}$
Erreur	$e(t)$	Correspond à la nature du signal de sortie du capteur. Typiquement des [V]	$[e] = \mathrm{V}$	$[e] = \mathrm{V}$

TAB. 1.3 – Unités physiques des principaux signaux d'un système de régulation automatique. Par unité physique, on entend celle du signal lui-même, définie par la réalisation du système, et non celle de l'information qu'il porte. Ainsi le signal de mesure de vitesse ω_m fourni par exemple par un capteur de type dynamo-tachymétrique a pour unité des [V] et non des $\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$.

1.4 Régulation de correspondance et régulation de maintien

On peut envisager deux modes de régulation automatique :

- la *régulation de correspondance* ("tracking", "poursuite"), où le but essentiel est de poursuivre une consigne $w(t)$ variable (figure 1.17) ;

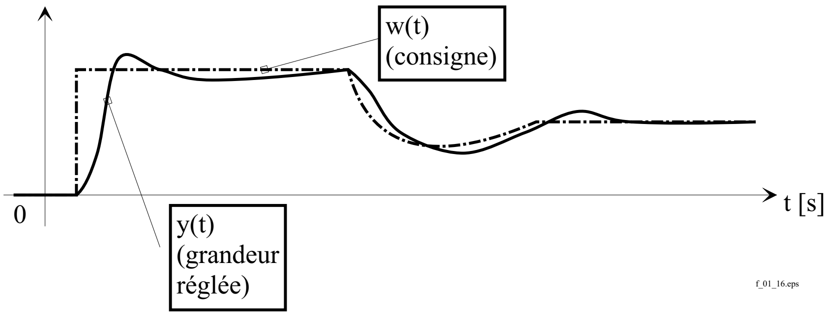


FIG. 1.17 – Régulation de correspondance (f_01.dsf).

- la *régulation de maintien*, où le régulateur a pour tâche principale de maintenir la grandeur réglée $y(t)$ égale à la consigne $w(t)$ malgré la présence de perturbations $v(t)$ (figure 1.18).

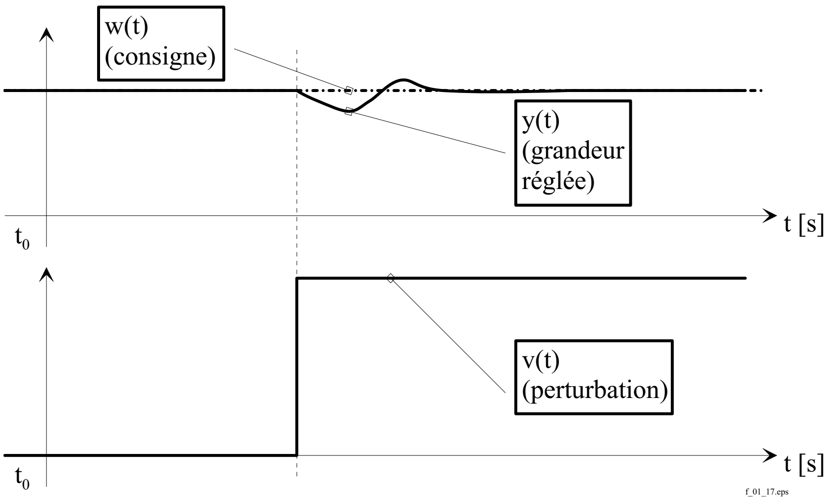


FIG. 1.18 – Régulation de maintien (f_01.dsf).

Dans la réalité, les 2 modes coexistent le plus souvent, le régulateur réagissant à toute forme d'erreur, quelle qu'en soit sont la cause (consigne variable ou perturbation aléatoire).

1.5 Problèmes fondamentaux des systèmes de régulation automatique

1.5.1 Stabilité

La stabilité d'un système de régulation automatique (voir définition rigoureuse chap.5) est une condition impérative afin que l'installation soit utilisable. Or, tout système contre-réactionné est potentiellement instable. La cause en est due au retard parfois trop important que peut subir un signal (ou certaines de ses composantes spectrales) se propageant à travers la boucle le ramenant vers l'entrée, i.e. la boucle de contre-action. L'exemple de la douche illustre cela de manière intuitive (figure 1.19). En négligeant les pertes thermiques dans le tuyau,

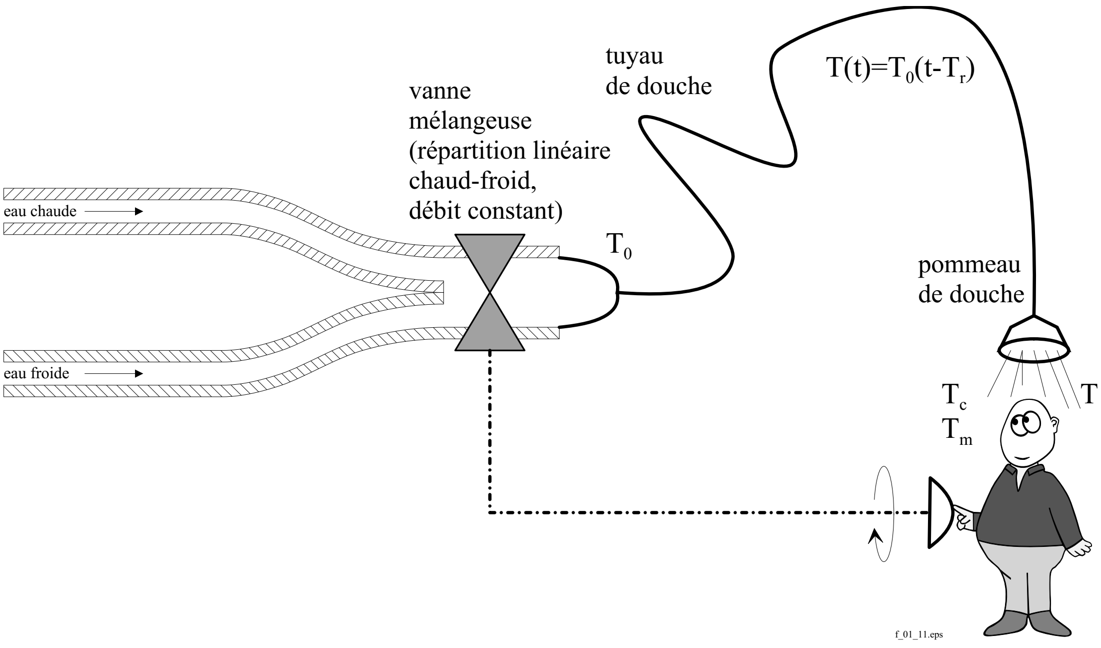


FIG. 1.19 – Régulation manuelle de la température d'une douche : schéma technologique. Pour l'exemple, on suppose que le débit est constant et que seule la répartition chaud-froid est modifiée (f_01.dsf).

on a simplement :

$$T(t) = T_0(t - T_r)$$

où T_r est le temps nécessaire à l'eau pour se propager à travers le tuyau de douche. Dans le vocabulaire des systèmes asservis, on l'appelle *retard pur* (§ 5.4.3 page 196).

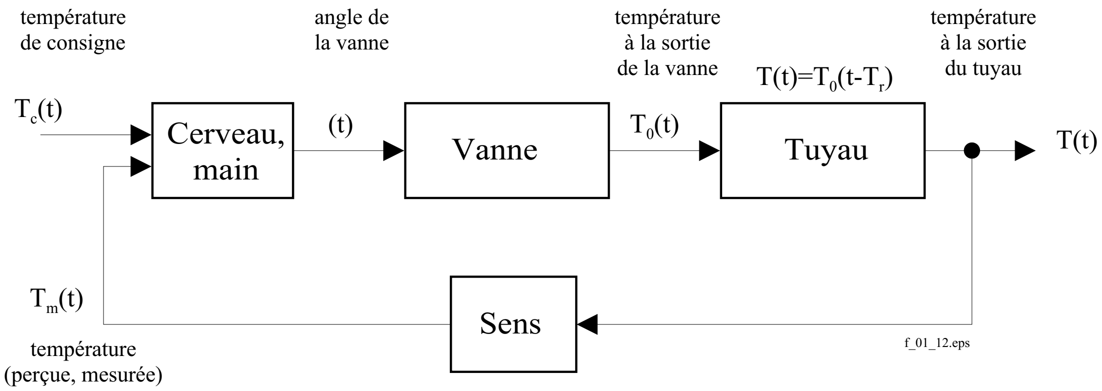


FIG. 1.20 – Régulation manuelle de la température d'une douche : schéma fonctionnel (f_01.dsf).

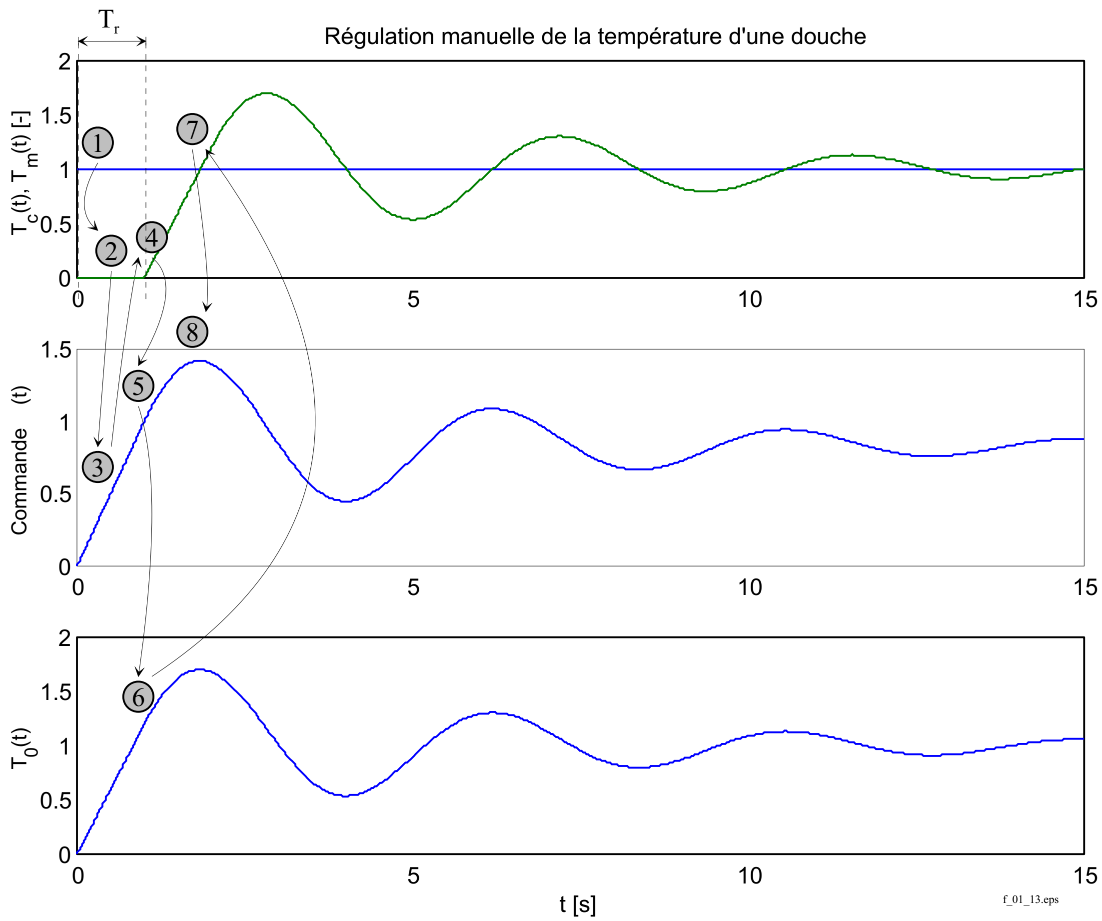


FIG. 1.21 – Régulation manuelle de la température d'une douche (`Demo_05.mdl`, `cal_Demo_05.m`) : cas de l'opérateur "pressé", i.e. d'un régulateur à gain élevé (f_01.dsf).

Il y a donc dans cet exemple un **retard pur** T_r [s] entre l'action entreprise par l'opérateur sur la vanne pour modifier la température $T_m(t)$ et l'effet résultant. C'est le cas de l'opérateur "pressé" (figure 1.21 page précédente) qui met en évidence le phénomène d'instabilité :

1. L'opérateur commence sa douche et désire que l'eau soit à la température T_c ;
2. L'opérateur s'aperçoit que la température T_m de l'eau est bien inférieure à la valeur souhaitée T_c ;
3. L'opérateur ouvre modérément la vanne mélangeuse ;
4. L'opérateur s'aperçoit que l'ouverture de la vanne mélangeuse est sans effet notable ;
5. L'opérateur ouvre davantage la vanne mélangeuse ;
6. La température T_0 de l'eau directement à l'entrée du tuyau est alors à une valeur élevée ;
7. L'eau de température élévée parvient à l'opérateur : la température de l'eau T_m dépasse alors largement la consigne T_c ;
8. L'opérateur réagit en tournant la vanne dans l'autre sens.

Et le pire est à venir : l'eau beaucoup trop chaude parvient au bout du tuyau, provoquant une réaction vive de l'opérateur. Si celui-ci se comporte de manière symétrique (que l'eau soit trop chaude ou trop froide), l'eau va devenir exagérément froide et une oscillation de plus ou moins longue durée peut s'ensuivre. Le système observé ici n'est pas instable, mais présente des signes alarmants de tendance vers l'instabilité : il peut devenir incontrôlable si un opérateur encore plus pressé prend sa douche ...

1.5.2 Précision et rapidité

L'exemple de la régulation de vitesse (figure 1.13 page 23) avec régulateur P montre que même en régime permament constant (consigne constante, etc), une erreur subsiste : ce phénomène est malheureusement normal puisqu'en effet, pour que le moteur DC tourne, même à vide, à une vitesse non-nulle correspondant si possible à la consigne, il faut l'alimenter par une tension $u_a(t)$ aux bornes de l'induit que l'on s'imagine facilement différente de zéro. Or :
- $u_a(t) \approx u(t)$ dans le cas d'un amplificateur de puissance idéal ;
- $u_a(t) \neq 0\,[\mathrm{V}] \Longleftrightarrow u(t) \neq 0\,[\mathrm{V}]$;
- $u(t) \neq 0\,[\mathrm{V}] \Longleftrightarrow e(t) = \frac{u(t)}{K_p} \approx \frac{u_a(t)}{K_p} = E_\infty \neq 0\,[\mathrm{V}]$.

L'erreur E_∞ observée s'appelle **erreur statique**. On dit que le système asservi a du **statisme**. Dans le cas simple du moteur à vide, la tension $u_a(t)$ doit équilibrer la FEM (tension induite de mouvement) $e_m(t) = K_E \cdot \omega(t)$. On en déduit la valeur

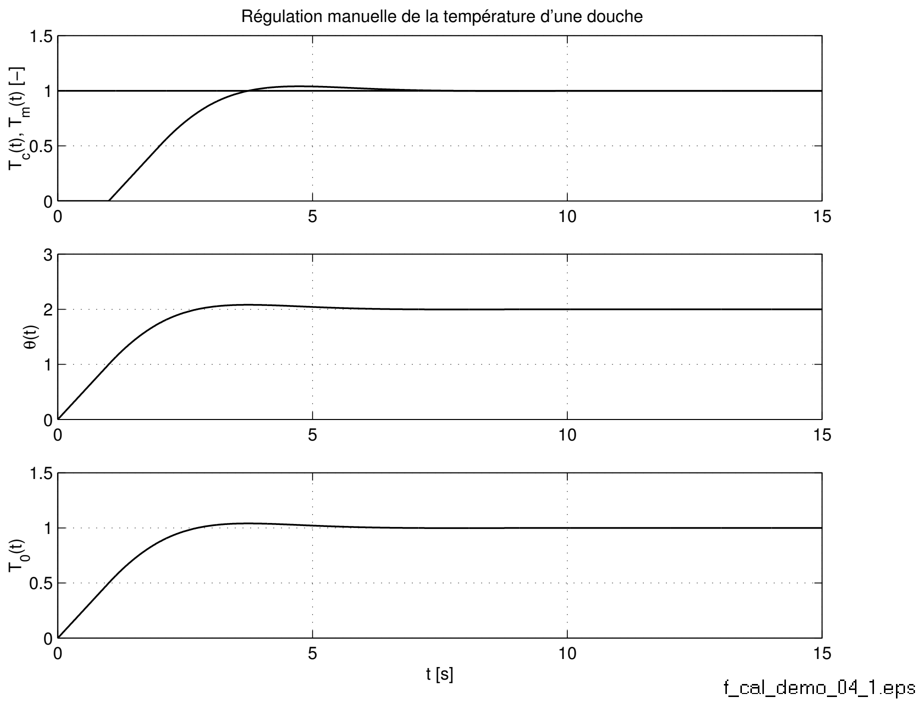


FIG. 1.22 – Régulation manuelle de la température d'une douche (cal_Demo_04.m) : cas de l'opérateur "calme" (cal_demo_04.m).

de l'erreur E_∞ :

$$E_\infty = \frac{e_m(t \to \infty)}{K_p} = \frac{K_E \cdot \omega(t \to \infty)}{K_p} = \frac{K_E}{K_p} \cdot \omega(t \to \infty)$$

Pour diminuer la valeur de l'erreur statique E_∞, il faut logiquement augmenter le gain proportionnel K_p du régulateur. Ce faisant, l'action entreprise par le régulateur en présence d'erreur est de plus en plus énergique et la rapidité du système est également améliorée (figure 1.23 page suivante).

1.5.3 Dilemme stabilité-précision

Si, appliquant les conclusions du paragraphe précédent, on tente d'améliorer la précision et la rapidité en augmentant encore le gain K_p du régulateur proportionnel à 53, un phénomène analogue à celui observé avec la douche (figure 1.21 page 31) apparaît (figure 6.23 page 233) : le système asservi oscille de manière apparemment entretenue à une fréquence voisine de 129 [Hz], l'amplitude de l'oscillation ayant tendance à croître indéfiniment : le système est pratiquement instable. On peut comprendre intuitivement la cause de cette instabilité en

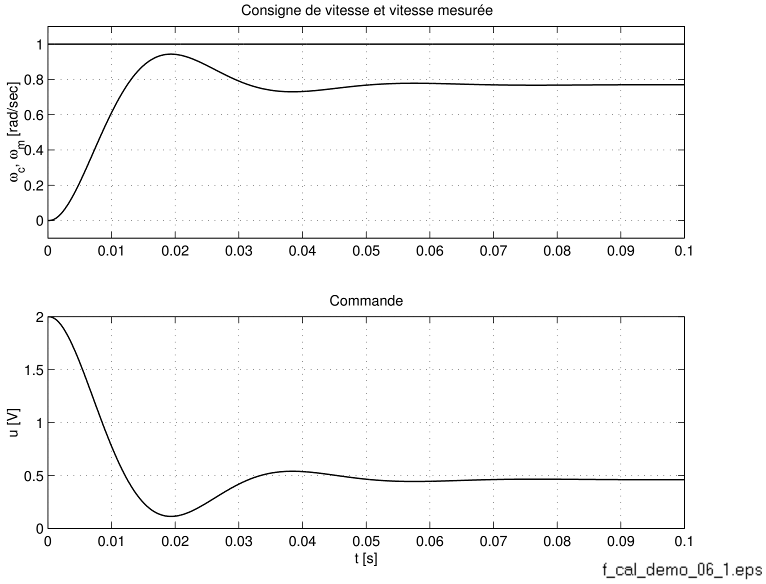


Fig. 1.23 – Régulation automatique de la vitesse d'un moteur DC, avec régulateur P, $K_p = 2$ (`Demo_02.mdl, cal_Demo_06.m`). L'erreur statique $E_\infty \approx 25\%$ est inférieure à celle de la figure 1.13 page 23 et le système est plus rapide (cal_demo_06.m).

examinant la réponse fréquentielle du système asservi en boucle ouverte, i.e. le comportement fréquentiel de la chaîne d'éléments (figure 1.25 page 36) allant de l'entrée du régulateur (l'erreur $e(t)$) à la sortie du capteur (la grandeur réglée $y(t)$). Le diagramme de Bode la figure 6.22 page 232 montre en effet qu'un signal d'erreur :

- ne subit, la fréquence d'environ 129 [Hz], aucune atténuation ou amplification, le gain de boucle à cette fréquence étant de 0 [dB] = 1 ;
- est déphasé, i.e. retardé, d'exactement -180 [°] à cette même fréquence.

En conséquence, la composante spectrale à 129 [Hz] du signal d'erreur $e(t)$ se propageant dans la boucle voit tout simplement son signe inversé, ce qui implique qu'à cette fréquence, il n'est pas contre-réactionné, mais réactionné (figure 1.27 page 38) : du fait de la structure bouclée, une augmentation de la grandeur de commande $u(t)$ provoque une augmentation de la grandeur réglée $y(t)$ qui provoque à son tour une augmentation de l'erreur $e(t)$ et par suite de la grandeur de commande. Le système s'emballe, n'est plus sous contrôle, ce qui peut aboutir à sa destruction si des limites physiques n'interviennent pas suffisamment tôt (échauffement du moteur, dépassement de la vitesse limite des roulements, etc). Les exemples de la douche (§ 1.5.1 page 30) et de la régulation de vitesse montrent que plus l'action du régulateur est violente (cas de l'opérateur "pressé",

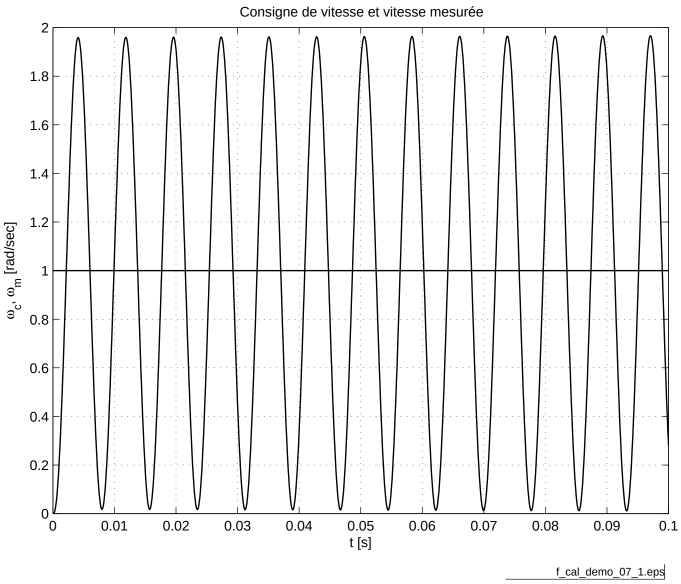


FIG. 1.24 – Régulation automatique de la vitesse d'un moteur DC, avec régulateur P, $K_p = 53$ (`Demo_02.mdl, cal_Demo_07.m`). Le système asservi est quasi instable (cal_demo_07.m).

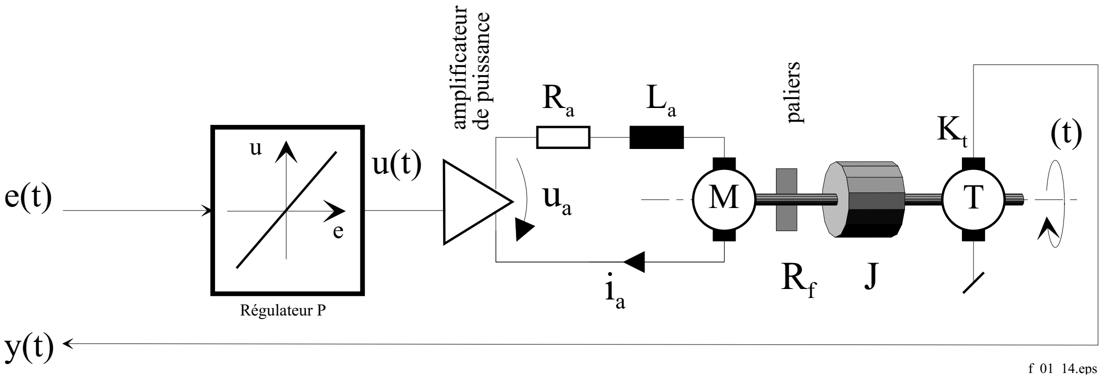


FIG. 1.25 – Obtention de la réponse harmonique en boucle ouverte : le signal d'entrée est l'erreur $e(t)$ et celui de sortie la grandeur réglée $y(t)$. Le résultat est donné sur la figure 6.22 page 232 (f_01.dsf).

respectivement cas du régulateur P de vitesse avec $K_p = 53$), i.e. plus le gain du régulateur est élevé, plus il y a risque d'instabilité. Pour des raisons de stabilité, et par suite de sécurité de l'installation, il y a donc en principe intérêt à travailler avec des gains modestes.

Mais l'amélioration de la précision et de la rapidité de la régulation de vitesse évoquée au § 1.5.2 page 32 montre au contraire tout le bénéfice qu'il y a à augmenter les gains du régulateur, i.e. la *raideur* de l'asservissement.

Ces intérêts contraires constituent ce qui est communément appelé le *dilemme stabilité-précision*. Tout l'art de l'ingénieur automaticien consiste à trouver une solution satisfaisant simultanément les exigences de stabilité et de précision.

En pratique, un autre dilemme rend le travail de l'ingénieur-automaticien plus complexe : on pourrait l'appeler **dilemme précision-bruit**, lequel limite souvent les performances du système asservi bien avant celui de stabilité-précision. En effet, les performances des systèmes asservis sont souvent limitées non pas par des questions de stabilité, mais par des problèmes de bruit sur la commande, qui est en fait dû essentiellement à l'amplification (par exemple par le gain K_p d'un régulateur P) du bruit de mesure. Si $n(t)$ est ce bruit, sa propagation au travers du régulateur le transforme en un bruit de valeur $K_p \cdot n(t)$ de valeur d'autant plus élevée que le gain K_p est élevé, i.e. que les performances exigées sont de haut niveau (figure 4.36 page 164). Dans le cas ou la commande a une influence directe sur une grandeur mécanique, le bruit qu'elle contient devient même audible et peut par exemple accélérer des phénomènes d'usure. Pour des systèmes 100% électriques, le bruit de la commande peut provoquer un échauffement supplémentaire.

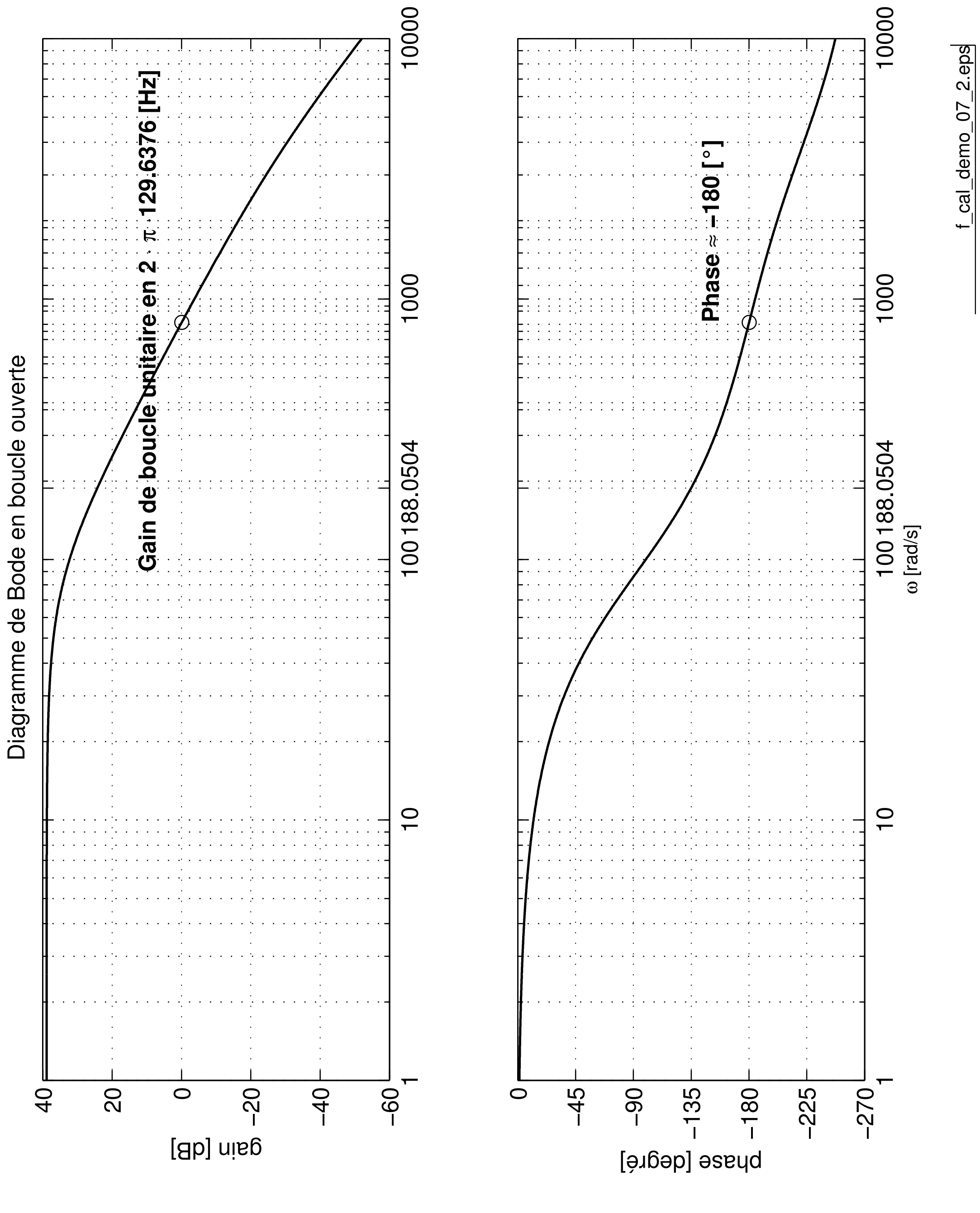


FIG. 1.26 – Réponse fréquentielle du système de régulation de vitesse en boucle ouverte (`Demo_02.mdl, cal_Demo_07.m`, $K_p = 53$) (cal_demo_07.m).

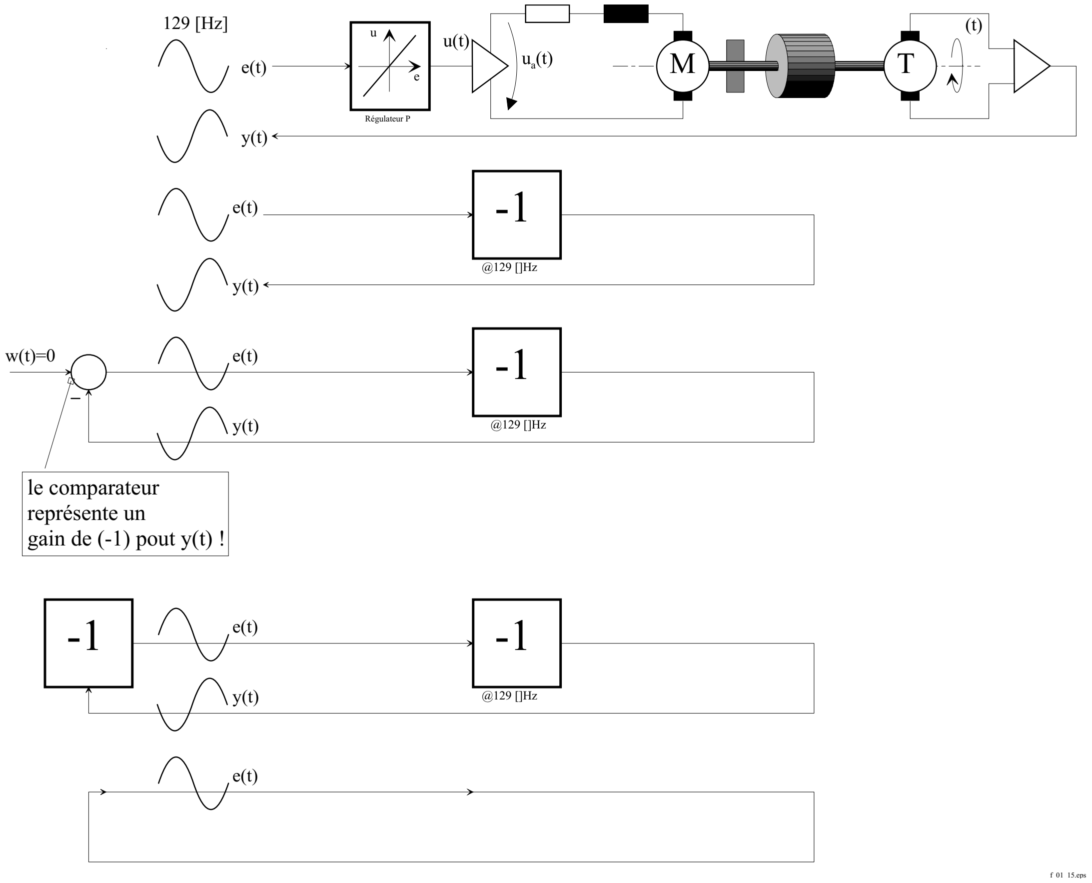


FIG. 1.27 – Régulation automatique de vitesse (`Demo_02.mdl, cal_Demo_07.m`) : pour $K_p = 53$, la composante spectrale à 129 [Hz] du signal d'erreur $e(t)$ voit tous les éléments de la boucle qu'elle traverse comme un simple gain $A(\omega)|_{\omega=2\cdot\pi\cdot 129\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]} = -1$. La contre-réaction devient, pour cette fréquence, de la réaction (f_01.dsf).

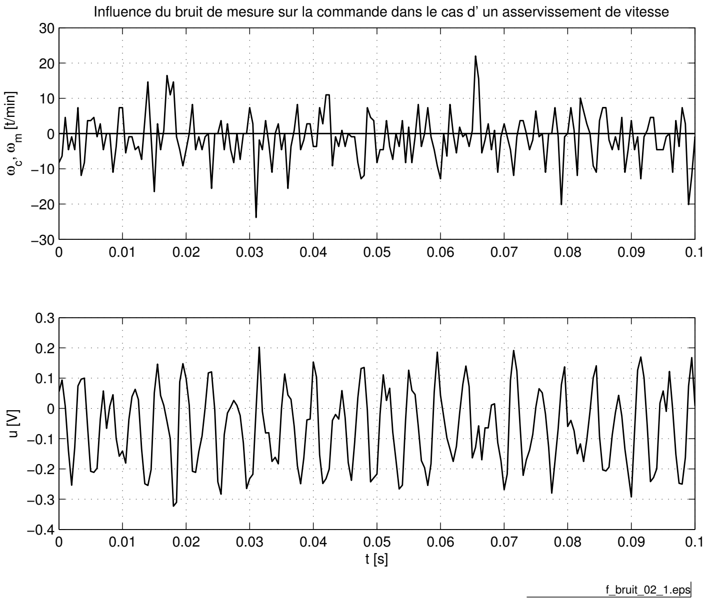


FIG. 1.28 – Influence du bruit de mesure d'un asservissement de vitesse (`bruit_02.m`). Bien que la consigne de vitesse ω_c soit à zéro, la vitesse mesurée ω_m s'en écarte continuellement, le régulateur réagissant au bruit de mesure (bruit_02.m).

1.6 Principe de la régulation numérique

En régulation numérique, le régulateur est réalisé sous la forme d'un algorithme de traitement, programmé par exemple en langage C, s'exécutant à intervalles réguliers h [s]. h est la *période d'échantillonnage*. Cela signifie que la grandeur réglée $y(t)$ est échantillonnée, i.e. $y(t)$ n'est observée qu'aux instants d'échantillonnage

$$0 \cdot h, 1 \cdot h, 2 \cdot h, \ldots k \cdot h, \ldots$$

auxquels une conversion A/D est effectuée. L'algorithme du régulateur est alors exécuté et délivre une grandeur de commande $u(k \cdot h)$ également à intervalles réguliers h. L'avantage principal de la régulation numérique est la souplesse d'em-

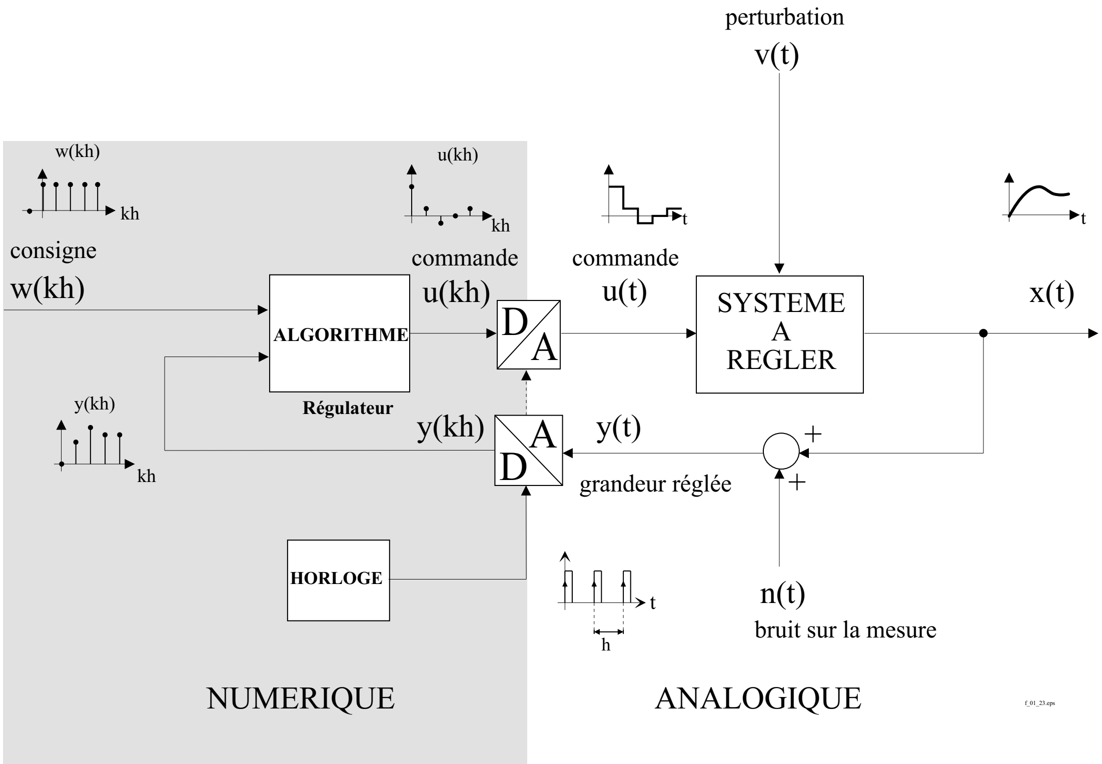


FIG. 1.29 – Principe de la régulation numérique : le régulateur prend la forme d'un algorithme programmé sur microprocesseur et exécuté en temps réel, i.e. impérativement à chaque période d'échantillonnage h. Les valeurs typiques de h vont de 10 [s] pour des systèmes de régulation de température à 50 [μs] pour des asservissements de courants dans les entraînements réglés. Pour ces derniers, une implantation du régulateur en assembleur sur processeur de signal (DSP) est quasi indispensable (f_01.dsf).

ploi, puisqu'aussi bien les paramètres du régulateur que sa structure peuvent être aisément adaptés à l'application [10].

```
void regulateur_PI()
{
     static float e[2] = {0.0,0.0};
     static float u[2] = {0.0,0.0};

     /* Lit le contenu du registre de sortie du convertisseur A/D */
     AD_Conv(&y);

     e[0] = w[0] - y[0]; /* forme l'écart */

     /* Calcule la commande u[k] */
     u[0] = u[1] + b0 * e[0] + b1 * e[1];

     /* Commande la conversion D/A de u[k] */
     DA_Conv(u[0]);

     u[1] = u[0];          /* mise à jour, gestion de la pile u */
     e[1] = e[0];          /* mise à jour, gestion de la pile e */
}
```

1.7 Généralités sur les systèmes

D'un point de vue technique, tout ensemble d'éléments, de composants, dispositifs, etc associés un but spécifié constitue un système (figure 1.30). Un système peut être simple ou complexe.

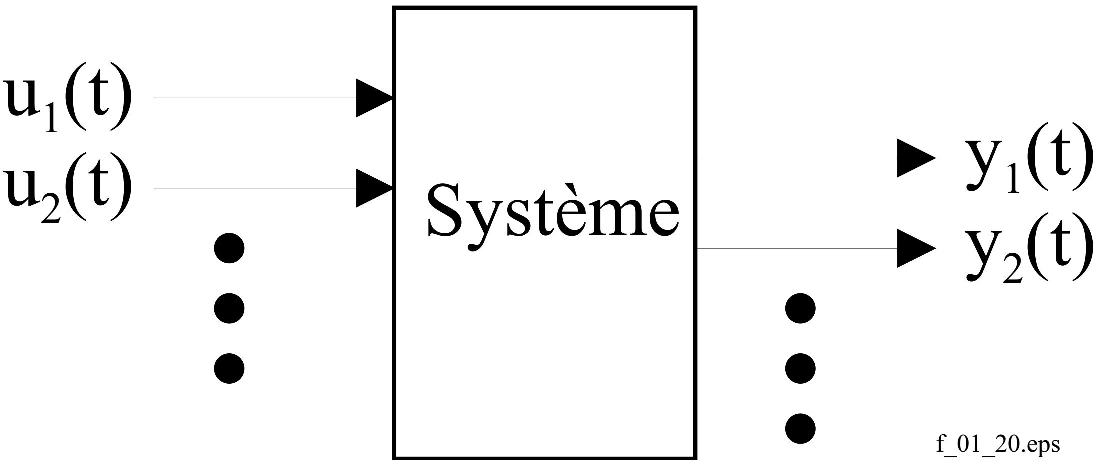


Fig. 1.30 – Système quelconque, multi-variable (f_01.dsf).

Afin de pouvoir contrôler (régler, asservir) un système, il est nécessaire de connaître un certain nombre de ses propriétés :
- nombre et nature des entrées et des sorties ;
- comportement statique ;
- comportement dynamique (temps de montée, nombre et période des oscillations, etc) ;
- linéarité ou non-linéarités ;
- stabilité ;
- etc

On se limite ci-après à l'étude de systèmes mono-variable (1 entrée $u(t)$, 1 sortie $y(t)$, figure 1.31)

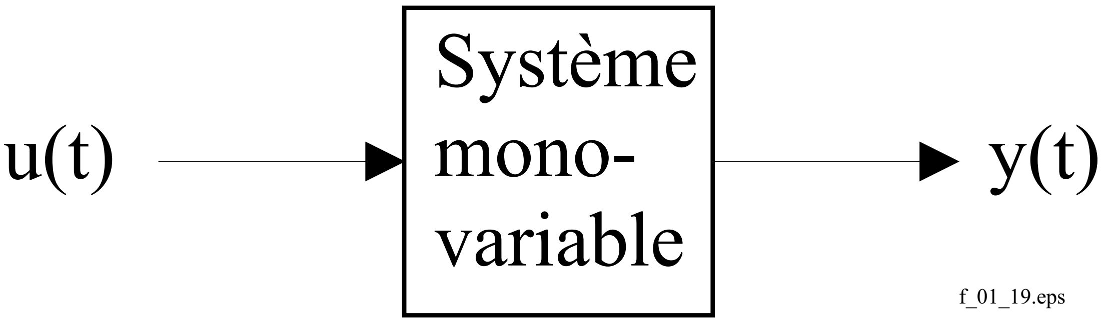


Fig. 1.31 – Système monovariable. Dans un contexte général, le signal d'entrée est appelé $u(t)$ et celui de sortie $y(t)$ (f_01.dsf).

1.7.1 Comportement dynamique

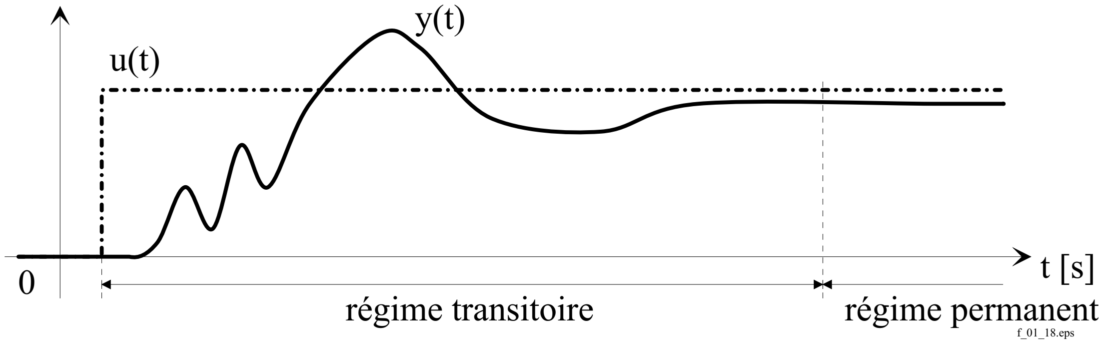


Fig. 1.32 – Exemple de réponse indicielle d'un système dynamique (f_01.dsf).

Le comportement dynamique, i.e. en régime transitoire, est souvent difficile à qualifier (quantifier) sur la base de l'analyse temporelle seule. Il faut des outils spécifiques tel que les transformations de Fourier et de Laplace.

1.7.2 Comportement statique

On considère le système étudié en régime permanent constant, i.e. lorsque $u(t) = \text{const.}$ et que $t \to \infty$. On peut alors en calculer le **gain statique** K :

$$K = \left. \frac{\lim_{t\to\infty} y(t)}{\lim_{t\to\infty} u(t)} \right|_{u(t)=\text{const.}}$$

1.7.3 Système statique

Un système est statique si sa sortie $y(t)$ à l'instant t ne dépend que de l'entrée $u(t)$ au même instant t.

Un tel système réagit donc instantanément, sans retard, sans régime transitoire ou temps d'établissement. Il est sans mémoire puisque le passé n'influence pas sa sortie présente. Un exemple de système statique est la résistance électrique idéale (figure 1.33).

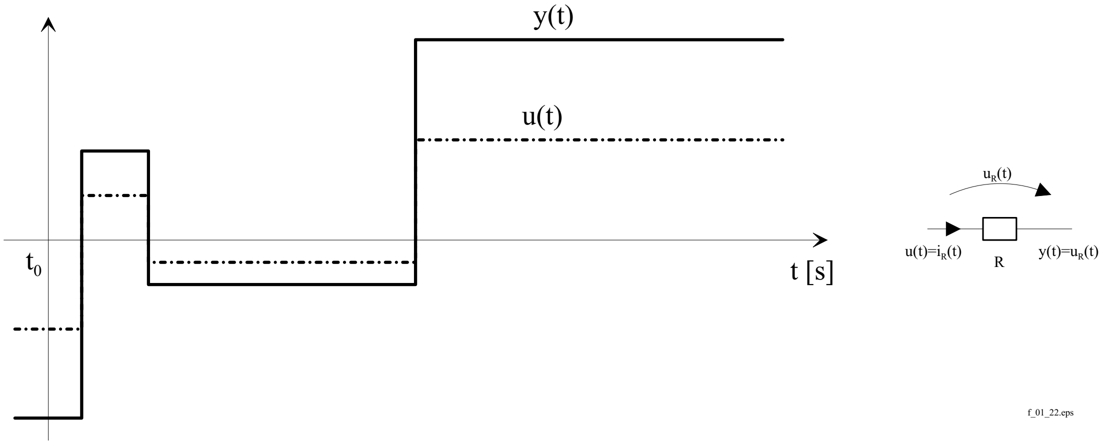


FIG. 1.33 – Exemple de système statique (f_01.dsf).

Du point de vue de l'automaticien, un système statique peut sans autre être décrit, i.e. représenté, par son gain statique K.

1.7.4 Système dynamique

Un système est dynamique si sa sortie $y(t)$ dépend non seulement de l'entrée présente $u(t)$ mais aussi des entrées (sorties) passées.

Un exemple est la capacité électrique : définissant le courant de charge $i_c(t)$ comme signal d'entrée et la tension aux bornes $u_c(t)$ comme signal de sortie, on a :

$$y(t) = u_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^{t} i_c(\tau) \cdot d\tau = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^{t} u(\tau) \cdot d\tau$$

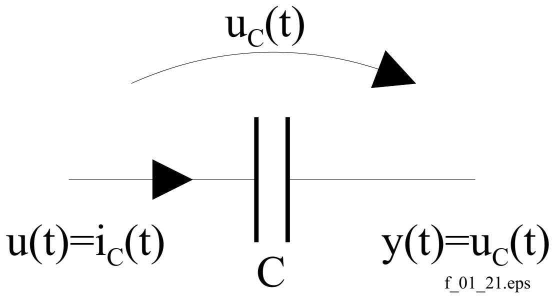


Fig. 1.34 – Exemple de système dynamique (f_01.dsf).

Un système dynamique est représentable mathématiquement par n équations différentielles d'ordre 1, linéaires ou non. Dans le cas ou des paramètres tels que la résistance, l'inertie, etc peuvent être définis sans trop s'éloigner de la réalité physique, le système est à *constantes localisées* et les équations différentielles sont aux dérivées totales.

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1\left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right) + g_1\left(u(t)\right) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2\left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right) + g_2\left(u(t)\right) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n\left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right) + g_n\left(u(t)\right) \\
y(t) &= h\left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right) + d\left(u(t)\right)
\end{aligned}$$

Dans la négative (propagation de la chaleur, lignes de transmission, mécanique des fluides, etc), on a affaire à un système à paramètres distribués et sa représentation doit se faire par des équations aux dérivées partielles.

1.7.5 Système linéaire

Un système est linéaire s'il obéit au **principe de superposition** :

– additivité : les causes ajoutent leurs effets (si $u_1(t) \rightarrow y_1(t)$ et $u_2(t) \rightarrow y_2(t)$, alors $u_1(t) + u_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$) ;

– homogénéité : il y a proportionnalité de l'effet à la cause (si $u(t) \rightarrow y(t)$ alors $a \cdot u(t) \rightarrow a \cdot y(t)$.

On se limitera, dans le cadre de ce cours, essentiellement aux systèmes linéaires, dynamiques, à constantes localisées, représentables dans le cas général par n équations différentielles linéaires d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11} \cdot x_1(t) + a_{12} \cdot x_2(t) + \ldots + a_{1n} \cdot x_n(t) + b_1 \cdot u(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21} \cdot x_1(t) + a_{22} \cdot x_2(t) + \ldots + a_{2n} \cdot x_n(t) + b_2 \cdot u(t) \\
\ldots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1} \cdot x_1(t) + a_{n2} \cdot x_2(t) + \ldots + a_{nn} \cdot x_n(t) + b_n \cdot u(t)
\end{aligned}$$

Ces n équations peuvent être présentées sous la forme d'une seule équation différentielle d'ordre n :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_0 \cdot u(t)$$

L'*ordre* d'un système dynamique linéaire est le nombre d'équation différentielles d'ordre 1 nécessaires à sa modélisation.

Des exemples de non-linéarités se trouvent dans des cas de figures tels que :

– la saturation magnétique provoquant une variation de l'inductance en fonction du courant : $L = L(i)$ (figure 1.35) ;

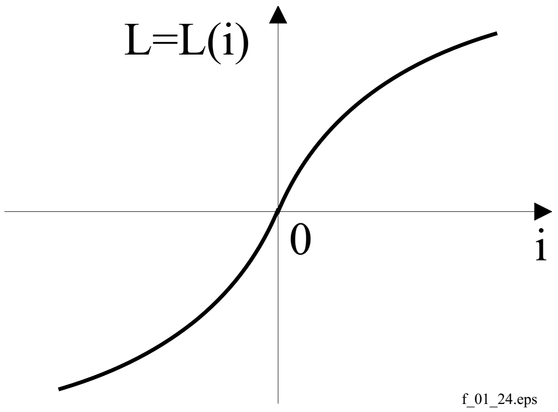


Fig. 1.35 – Non-linéarité d'une inductance L consécutive à la saturation magnétique (f_01.dsf).

– le frottement sec ou visqueux agissant sur l'arbre d'un moteur électrique dépend typiquement de la vitesse de rotation $T_{\text{frottement}} = T_{\text{frottement}}(\omega, \text{signe}(\omega))$ (figure 1.36) ;

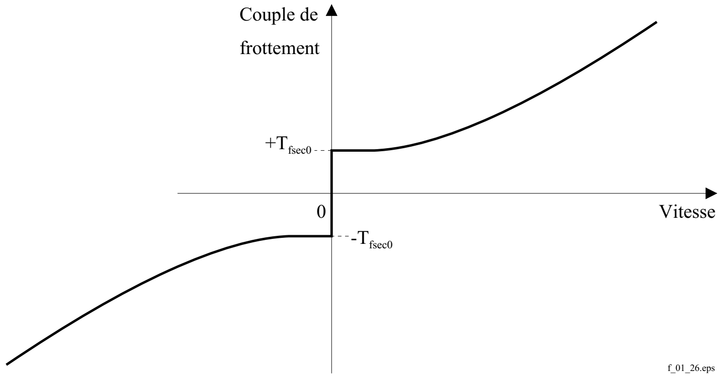


Fig. 1.36 – Non-linéarité due au frottement sec (f_01.dsf).

– la limitation de la grandeur de commande $u(t)$ est nécessaire pour protéger le système à régler : dans le cas où $u(t)$ entre en limitation, le système de régulation devient non-linéaire (figure 1.35 page précédente) ;

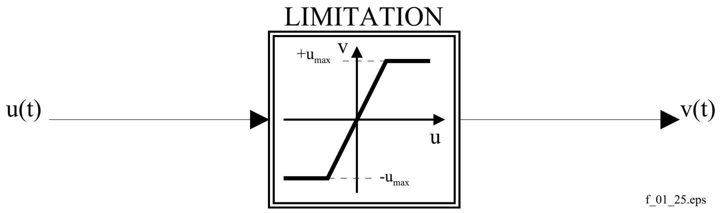


Fig. 1.37 – Non-linéarité due à la limitation nécessaire du signal de commande (f_01.dsf).

– un bras articulé de robot se déployant voit son inertie J varier en fonction de la position : $J = J(\theta)$.

Dans tous ces cas, on vérifie en effet que le principe de superposition ne s'applique pas.

Une méthode de linéarisation de tels systèmes sera présentée au § 2.7.6 page 115.

1.8 Autres exemples de systèmes asservis

On cite pêle-mêle ci-dessous d'autres exemples pratiques faisant intervenir de la régulation automatique :

Positionnement du bras d'un robot ou d'un élément d'une machine La position est mesurée au moyen d'un capteur adhoc (resolver, encodeur incrémental, règle optique, potentiomètre rotatif, etc, voir [9]), comparée à la consigne. Après traitement par le régulateur, la commande de l'actionneur (moteur) devrait tendre à diminuer l'erreur de position. Lorsque la consigne position évolue dans le temps, il faut alors la poursuivre, i.e. on parle de poursuite de trajectoire ou de "tracking".

Alimentation stabilisée Par exemple, les stabilisateurs de tension LM78XX permettent de garantir, sous certaines conditions et avec des précisions statique et dynamique données, une tension d'alimentation à par exemple $V_{cc} = 5\,[\mathrm{V}]$ (figure 1.38 page suivante).

La "trotinette" Segway Ce véhicule de transport révolutionnaire (figure 1.39) ne peut être maintenu en position verticale que par la mise en oeuvre des techniques de la régulation automatique. Le problème du maintien en équilibre vertical est analogue à celui de la fusée ou du célèbre pendule inversé.

Pilote automatique d'un avion Permet notamment à celui-ci de se maintenir à une altitude spécifiée malgré les effets de vents ascendants par exemple.

Régulateur de vitesse pour voiture de tourisme Appelé également "tempomat" (voir exercice). L'ABS (système anti-blocage) est également un exemple de système de régulation automatique, de même que les dispositifs de parcage automatique. Dans un autre registre, des projets visent à organiser, par exemple sur les trajets autoroutiers, les véhicules en convoi, chaque véhicule suivant automatiquement celui qui le précède à une distance ajustée en fonction de la vitesse.

Climatisation d'immeubles, de véhicules

Paliers magnétiques Magnetic bearings[1] Dans certaines applications, les contraintes de vitesse, d'usure, de propreté, de fiabilité, de vibrations ou d'échauffement sont telles que les paliers mécaniques ou à air ne conviennent pas. Il sont remplacés par des paliers magnétiques, un système de régulation assurant le centrage de l'axe (rotor ferromagnétique) en rotation en agissant sur un champ d'induction. Pour ces applications, les régulateurs sont typiquement numériques et implantés sur des DSPs (Digital Signal Processors).

Convertisseur R/D Les convertisseurs R/D (resolver to digital) fonctionnement selon ce principe [9] (figure 1.41 page 50). Ces méthodes sont largement mises en oeuvre dans d'autres application pour produire des mesures indirectes de grandeurs physiques (*methods for estimating the value of an unknown quantity by repeated comparison to a sequence of known quantities*).

Convertisseurs A/D à compensation Appelés aussi convertisseurs de type "tracking". Voir figure 1.42 page 51.

Convertisseurs A/D delta sigma Voir figure 1.43 page 51.

[1] http ://www.revolve.com/Technology/technology.html

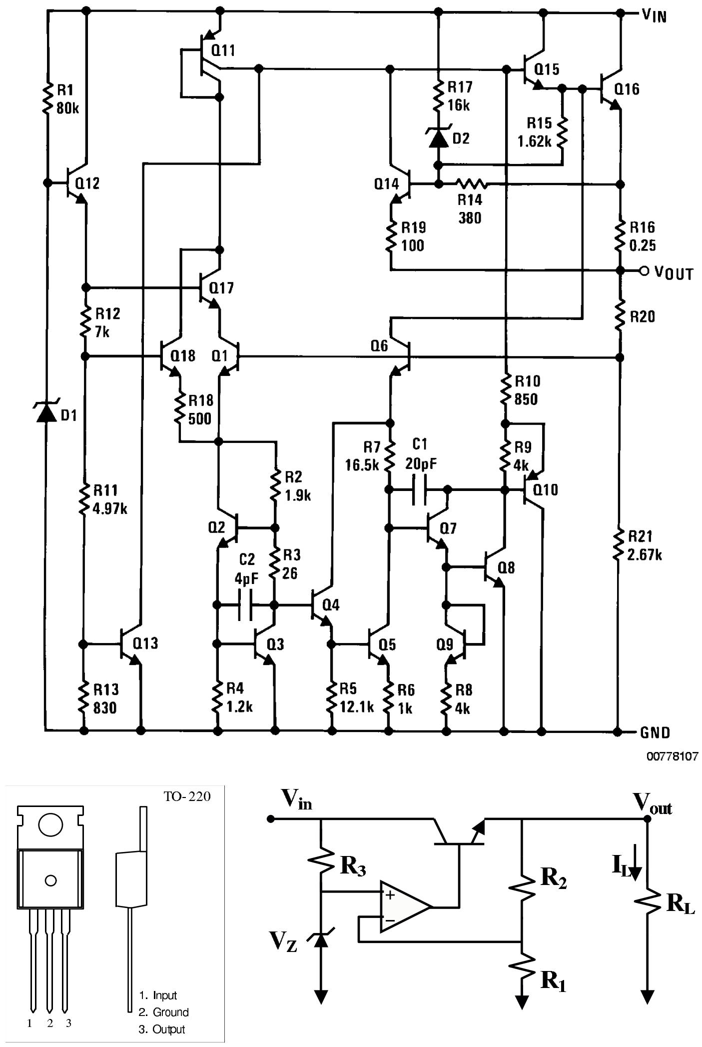


Fig. 1.38 – Régulateur de tension LM78XX, schéma équivalent du circuit intégré, boîtier, schéma technologique équivalent.

FIG. 1.39 – Véhicule inédit "Segway" (http ://www.segway.com/, figure de droite selon http ://www.control.lth.se/ bjorn/controlalpha/calpha.html, lettre B, "The control alphabet").

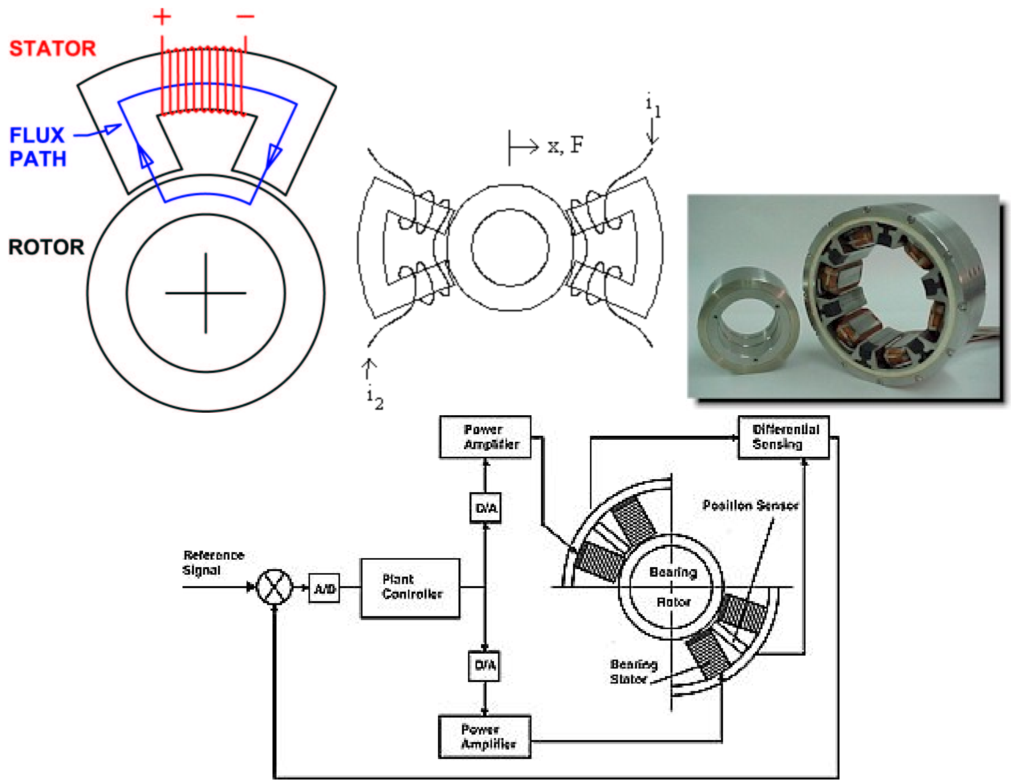


FIG. 1.40 – Paliers magnétiques, principe, commande et exemple de réalisation.

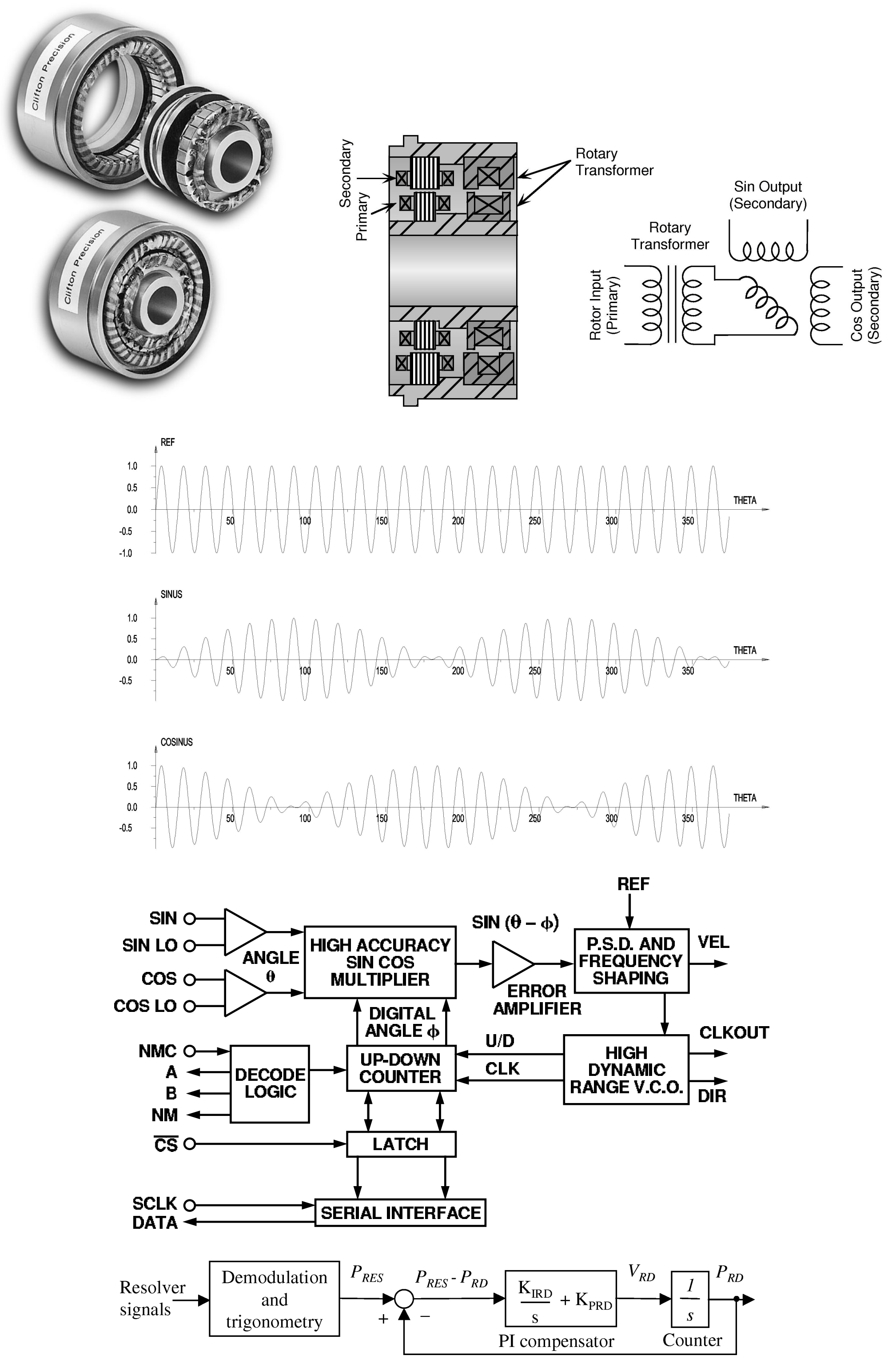


FIG. 1.41 – Resolver : construction, signaux, circuit AD2S90 d'Analog Devices permettant extraire la position angulaire, schéma fonctionnel.

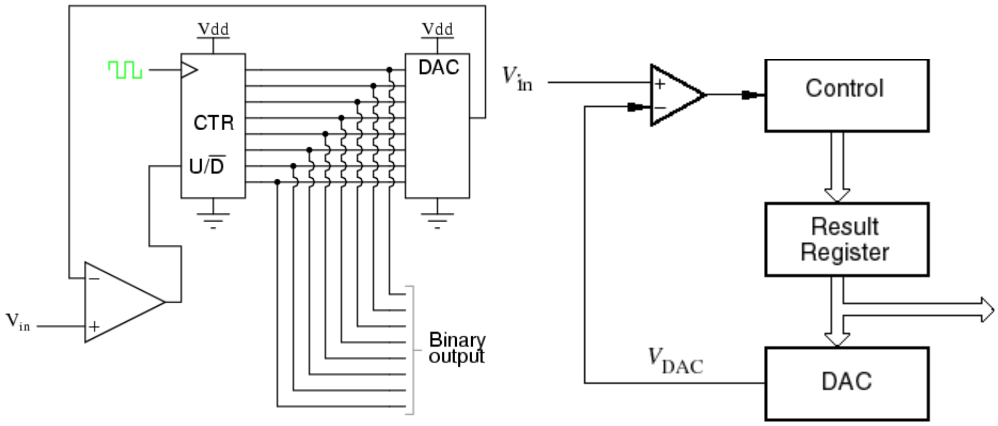


Fig. 1.42 – Convertisseurs A/D de type "tracking".

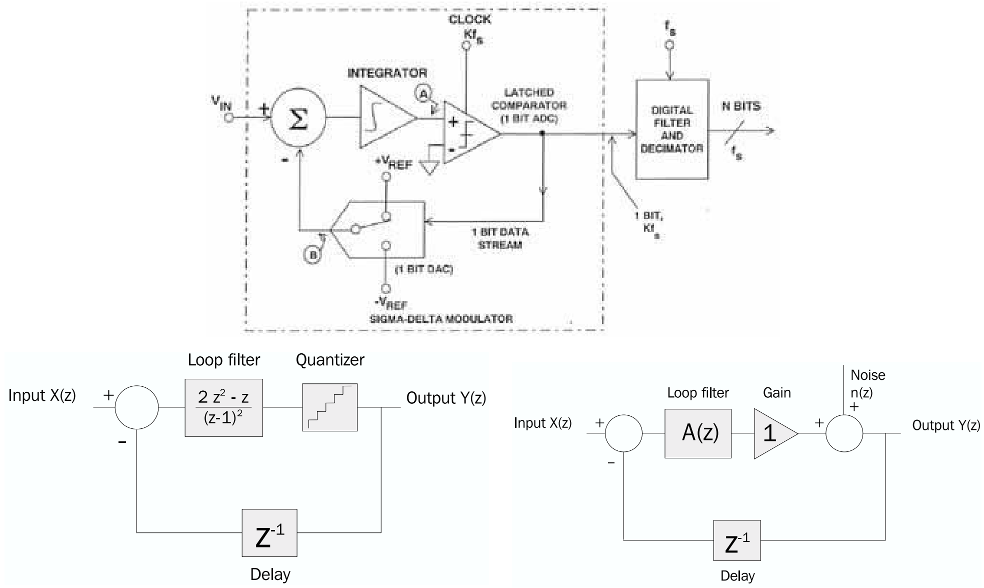


Fig. 1.43 – Convertisseurs A/D delta sigma : principe, schéma fonctionnels équivalents.

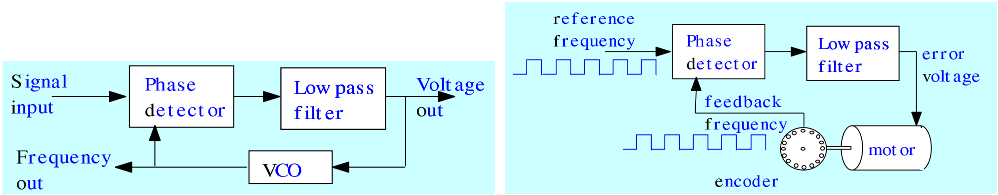


FIG. 1.44 – PLL, schéma fonctionnel et application à l'asservissement de position d'un moteur www.hep.ph.ic.ac.uk/ hallg/.

PLL La boucle asservie en phase (PLL) est un exemple de système asservi (figure 1.44).

Circuits électroniques L'amplificateur opérationnel, par exemple en montage suiveur, n'est autre qu'un système asservi dont la grandeur réglée est la tension de sortie et la consigne la tension appliquée sur l'entrée +.

L'être humain en position verticale A noter que ce même être humain est en difficulté dans cette tâche lorsque que ses réflexes ou son attention sont diminués (pour cause de fatigue, alcool, médicaments) : il est plus lent à réagir, et son comportement peut devenir oscillatoire (titubant ...), par un phénomène identique à celui décrit au § 1.5.1 page 30.

L'être humain conduisant son véhicule La consigne est la trajectoire à suivre, les yeux sont les capteurs reconstituant la situation exacte du véhicule sur la route et la commande consiste à ajuster la pédale des gaz.

1.9 Le projet d'automatique

De manière schématique, un projet de régulation automatique fait intervenir les tâches suivantes :

Analyse et conception : compréhension du fonctionnement de l'installation et des ses applications. Le plus souvent, l'installation existe et l'ingénieur chargé de l'automatisation devra "faire avec". Un contexte plus favorable se présente lorsque l'installation est en phase de conception. Il n'est alors pas trop tard pour influencer le développement afin de faciliter l'automatisation et par conséquent augmenter les performances. La présence de non-linéarités, rendant l'analyse de l'installation et la conception des régulateurs beaucoup plus difficiles, doit ainsi être limitée autant que possible. De même, le choix des capteurs est une phase importante où l'avis de l'automaticien doit être pris en compte, notamment par rapport à leur dynamique et à leur résolution ;

Elaboration du cahier des charges : sur la base des connaissances des applications visées, détermination du cahier des charges spécifiant les performances à atteindre (précision, rapidité, etc) ;

Modélisation : modélisation du comportement dynamique de l'installation au moyen des lois physiques la gouvernant. La complexité du modèle à obtenir dépend des spécifications du cahier des charges (rapidité, bande passante en boucle fermée, etc). Plus celui-ci sera exigeant (par exemple un temps de régulation très court), plus l'effort de modélisation se devra d'être important ;

Identification : détermination des valeurs numériques des paramètres du modèle, par des essais sur l'installation, par l'obtention de données catalogue, par des analyses de type éléments finis pour le calcul de structures complexes ;

Design du régulateur : choix de la stratégie de régulation, compte tenu des résultats des phases d'identification et de modélisation, des performances du matériel où sera implanté cette stratégie ainsi que du cahier des charges ;

Simulation : si cette phase révèle des difficultés quant au respect du cahier des charges, celui-ci peut/doit être revu, de même que la conception de l'installation si c'est encore possible. De même, les actionneurs (moteurs électriques par exemple) peuvent être dimensionnés avec un maximum d'informations (couple dynamique nécessaire, etc) ;

Implantation : implantation de la stratégie de régulation. Le plus souvent, il est nécessaire de spécifier, concevoir et réaliser un circuit électronique de commande, i.e. le régulateur, ou de programmer le microcontrôleur ou le processeur de signal où le code du régulateur numérique sera exécuté, etc ;

Validation : test in situ, validation.

On relève que le projet d'automatique se rapporte à l'ensemble du système et non pas à un composant unique. Par ailleurs, il n'est pas fait mention d'une technologie ou d'une classe de processus particuliers : il s'agit là en effet de caractéristiques notables de l'automatique,

- l'**approche système**, exigeant notamment une définition claire des entrées et des sorties de chaque sous-système (réalisés souvent dans des technologies différentes : mécanique, électronique, logiciel, pneumatique, etc) ainsi que des relations statiques et dynamiques entre-elles ;
- l'indépendance quasi totale des méthodes et outils vis-à-vis de la technologie mise en oeuvre (mécanique, chimie, électronique, etc), requérant néanmoins de l'ingénieur en automatique des **compétences pluridisciplinaires** avérées. Typiquement, l'ingénieur en automatique contribuera à la réalisation de l'électronique et/ou du logiciel de commande.

En pratique, la démarche énoncée ci-dessus n'est pas toujours suivie à la lettre, principalement pour des raisons de temps mais parfois également de méconnaissance de l'automatique. Il en résulte en certains cas l'impossibilité de satisfaire le cahier des charges, les limites de performances provenant de l'installation elle-même, dont la conception n'a pas tenu compte des aspects d'automatisation. Le temps initialement gagné lors de cette phase est perdu lors de celle de mise en service et de test. Dans le meilleur des cas, les défauts de l'installation peuvent élégamment être compensés de manière active par l'électronique de commande, i.e. le régulateur, mais ce n'est malheureusement pas toujours possible. Une des difficultés rencontrées est que l'automatisation de la machine est souvent réalisée par des fournisseurs externes, lesquels ne sont en général pas impliqués directement dans la phase de conception.

Une des raisons de cet état de fait est que l'automatique manque de visibilité : il s'agit d'une technique "cachée", non clairement matérialisable, prenant la forme d'algorithmes de traitement (régulateurs) et d'analyses mathématiques.

1.10 L'automatique : un domaine important pour tous les domaines de la technique et plus encore ...

Fait remarquable, l'application des méthodes de l'automatique ne se limite pas aux domaines de l'ingénierie mais s'étend sans difficulté aux systèmes biologiques comme le corps humain, dont on cherche par exemple à contrôler, i.e. à réguler le taux de sucre dans le sang ou la pression artérielle. Il en va de même des systèmes économiques, pour lesquels des données (i.e. des variables, des signaux) comme le taux de chômage ou l'inflation sont par exemple influencés par la politique fiscale des gouvernements [11].

Un avantage indirect apporté par un bon asservissement est l'optimisation du rendement énergétique : avec un régulateur bien ajusté, la commande de l'actionneur tend vers celle qui correspond à la puissance instantanée strictement nécessaire. L'exemple de la figure 1.45 page 56 montre la consommation d'énergie électrique nécessaire pour effectuer avec un servo-moteur un mouvement de rotation de 100 [rad], le contrôle du courant étant de performance moyenne (la commande scalaire) dans un cas et de qualité supérieure dans l'autre (commande vectorielle). On observe clairement tout le bénéfice qu'il y a à mettre en oeuvre une stratégie de commande bien adaptée. Comme environ les 50% de la consommation d'énergie électrique des pays occidentaux est imputable aux moteurs électriques entraînant aussi bien des machines de production industrielle que des installations domestiques (e.g. machines à laver le linge), la régulation automatique de ceux-ci constitue un élément déterminant dans la rationalisation de l'utilisation de l'énergie. Des considérations analogues peuvent être faites au sujet du dimensionnement d'organes de machines ou de véhicules : grâce aux techniques de l'automatique, des choix plus économiques et plus rationnels peuvent être effectués.

S'il ne fallait retenir qu'une seule des compétences qu'offrent les méthodes et les techniques de l'automatique, c'est assurément celle permettant d'analyser, de comprendre et d'influencer la dynamique des systèmes en général qui serait choisie. Cela constitue bel et bien l'apport majeur de l'enseignement de l'automatique dans la formation d'un ingénieur, justifiant l'importance quantitative lui étant accordée dans la plupart des filières.

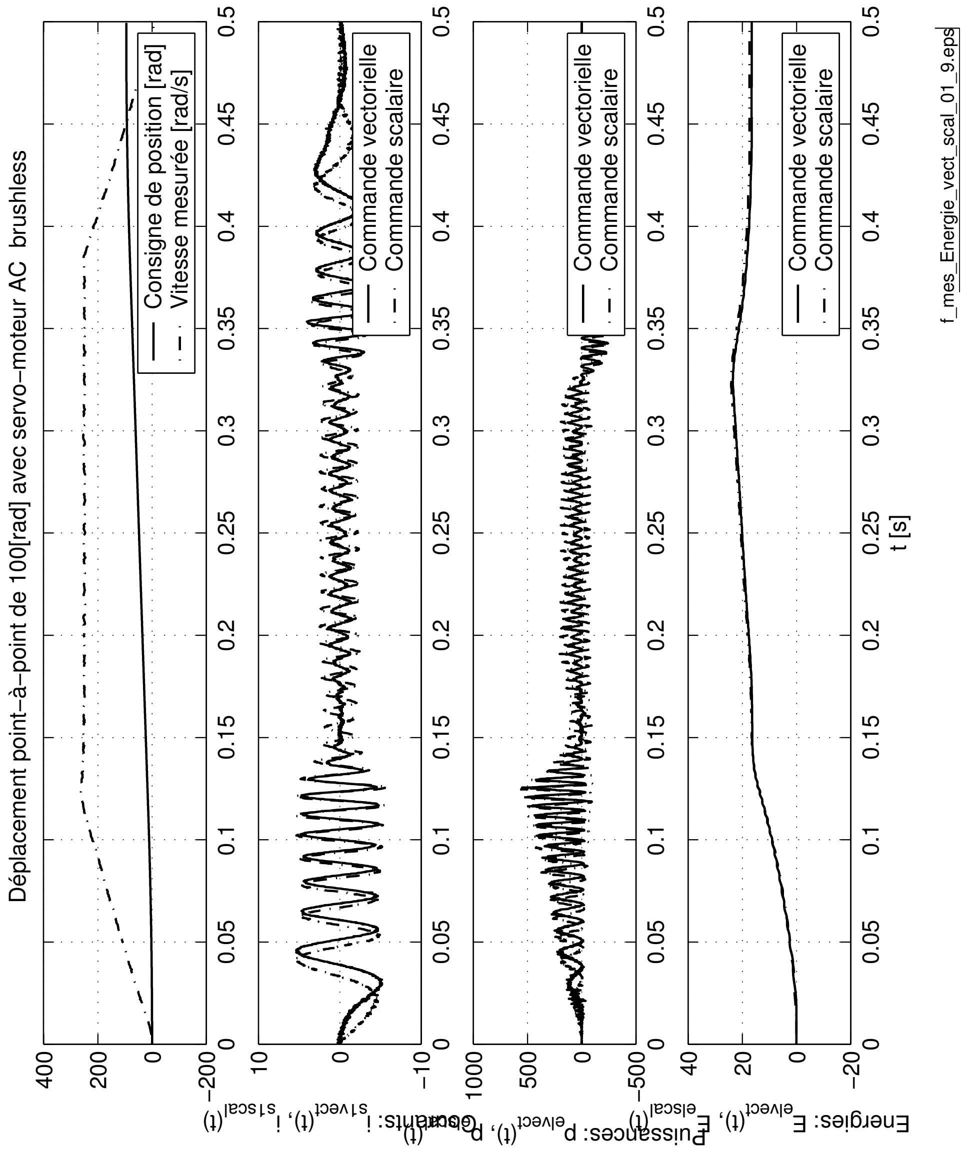


Fig. 1.45 – Consommation d'énergie électrique dans le cas d'un mouvement de 100 [rad]. Le profil de position a l'allure de 2 arcs de parabole raccordés par une rampe, celui de vitesse prenant la forme d'un trapèze. On observe qu'en palier, i.e. à vitesse constante, un courant notable est consommé dans le cas de la commande scalaire, résultant en une consommation d'énergie plus importante pour le même mouvement. Outre le surcoût occasionné par cette dépense d'énergie, le problème est l'évacuation des pertes thermiques supplémentaires ainsi provoquées.

Chapitre 2

Modélisation, représentation et simulation des systèmes dynamiques linéaires

2.1 Introduction

Dans le but de garantir les spécifications imposées par le cahier des charges d'un asservissement (stabilité, rapidité, précision, etc), on ne peut choisir et dimensionner le régulateur au hasard. L'obtention des meilleures performances nécessite au contraire de tenir compte des propriétés et paramètres du système à régler (gain statique, retard pur, inertie, constante de temps, etc). Ceux-ci n'étant que rarement disponibles sur catalogue et n'étant que très difficilement extraits des plans de conception de l'installation, les paramètres du système à régler peuvent/doivent être en principe obtenus en réalisant des expériences et des mesures (phases de modélisation et d'identification selon § 1.9 page 52).

Il faut garder à l'esprit que l'ensemble de ces propriétés est déterminé par les lois physiques qui gouvernent le système et sont avantageusement condensées dans le modèle mathématique du système à régler. Ce modèle, ainsi construit sur la base des lois physiques, est appelé *modèle de connaissance*. La modélisation de connaissance est donc la phase d'un projet d'automatique consistant à obtenir les équations (différentielles selon le § 1.7.5 page 45) régissant le système à régler.

En disposant d'un tel modèle, on évite d'avoir à faire des mesures sur le système réel pour chaque cas de figure à analyser et l'on peut ainsi limiter les coûts (durée des essais, déplacements, etc) et parfois les risques par l'utilisation d'un simulateur (MATLAB , SysQuake, etc). Il existe également des situations où le système réel n'existe pas encore ! De plus certaines propriétés (le gain statique, la structure notamment, etc) du système apparaissent plus clairement si le modèle de connaissance est établi, ce qui permet par exemple de déterminer précisément les modifications à entreprendre sur une installation afin de rendre

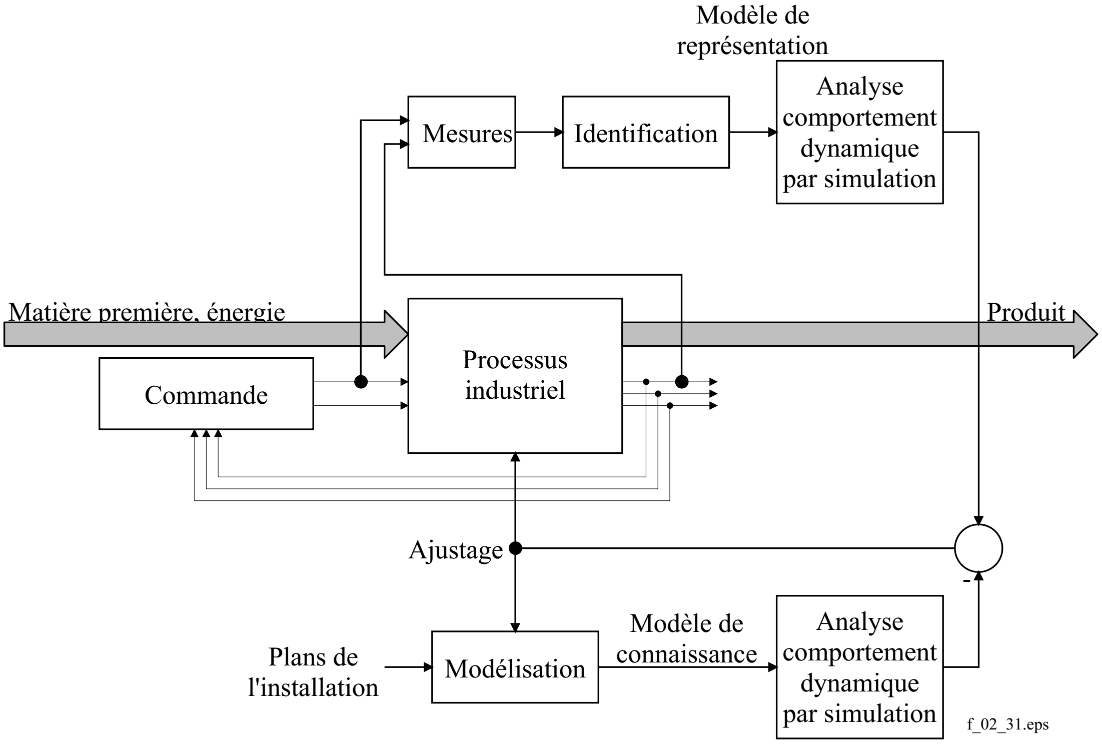


Fig. 2.1 – Illustration de 2 démarches conduisant à l'obtention du modèle d'un système. Un modèle est quasi indispensable pour déterminer le régulateur le mieux approprié pour satisfaire les performances exigées dans le cahier des charges de l'asservissement. De plus, le modèle de connaissance, validé par la comparaison avec celui obtenu par identification, permet d'analyser plus aisément, par la simulation, le comportement de l'installation, en vue d'éventuelles modifications visant à améliorer les performances, la fiabilité, etc (fichier source).

son asservissement plus performant.

Une démarche alternative à la modélisation de connaissance, mais le plus souvent complémentaire, consiste à réaliser, à partir d'un nombre limité de mesures pratiquées sur le système, son *identification* [[10], chap.8]. Les techniques d'identification permettent en principe d'obtenir les valeurs numériques des paramètres d'un modèle mathématique capable de représenter de manière suffisamment fidèle un système (*modèle de représentation*). Un exemple est donné à la figure 2.2 page suivante. L'identification est bien sûr également utilisable pour identifier les paramètres d'un modèle issu d'une modélisation de connaissance.

En fait, comme l'illustre la figure 2.1, c'est souvent la combinaison des 2 approches décrites qui amène les meilleurs résultats.

On examine ensuite dans ce chapitre 4 méthodes de représentation de systèmes dynamiques linéaires :

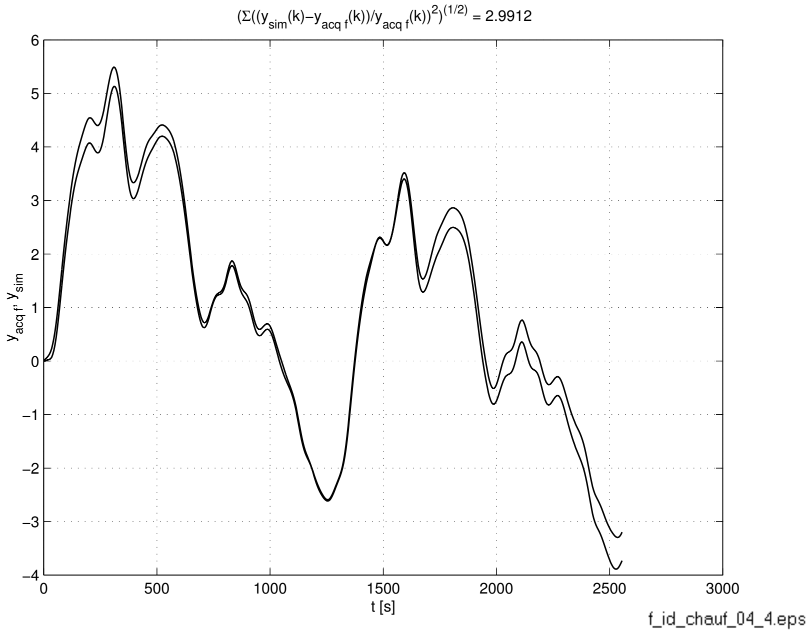


FIG. 2.2 – Température mesurée y_{acq} et température y_{est} fournie par un modèle, cas d'un processus industriel. On observe une très bonne correspondance, chiffrée par la moyenne de la somme des carrés des différences $y_{acq} - y_{est}$ (fichier source).

- n équations différentielles d'ordre 1 (§ 2.3.5 page 80), ou modèle d'état (§ 2.7 page 99) ;
- 1 équation différentielle d'ordre n (§ 2.3.5 page 80) ;
- la réponse impulsionnelle $g(t)$ (§ 2.4 page 81) ;
- la fonction de transfert $G(s)$ (§ 2.5 page 81).

2.2 Exemples de réponses indicielles typiques

Afin d'illustrer l'importance de la connaissance du comportement dynamique du système à régler, on présente dans les paragraphes suivants l'allure de la réponse indicielle de systèmes dynamiques linéaires que l'on rencontre plus ou moins fréquemment dans la pratique. D'une manière générale, la convention est de désigner le signal d'entrée par $u(t)$ et celui de sortie par $y(t)$ (figure 2.3 page suivante).

2.2.1 Systèmes à retard pur

Un système présentant *retard pur* est tel que sa réponse à une entrée appliquée à l'instant t n'est influencée par ladite entrée qu'une durée T_r plus tard. La

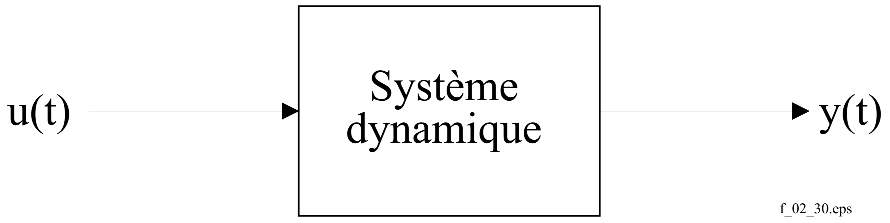


FIG. 2.3 – Le signal d'entrée du système étudié est habituellement désigné par $u(t)$ et celui de sortie par $y(t)$ (fichier source).

figure 2.4 illustre le comportement de tels systèmes.

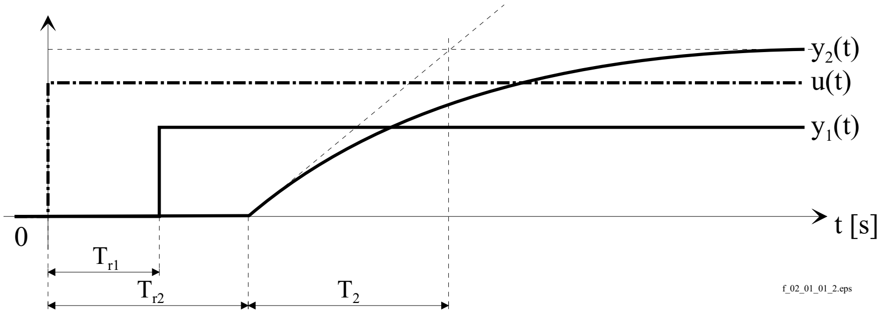


FIG. 2.4 – Réponses indicielles d'un système à retard pur ($y_1(t)$) et d'un système à retard pur et constante de temps ($y_2(t)$) (fichier source).

L'exemple de la douche du § 1.5.1 page 30 montre un processus comportant un retard pur dû à la durée de l'écoulement à travers le tuyau. Un autre exemple de système à (petit) retard pur est l'asservissement par régulateur numérique de la figure 1.29 page 40, la durée d'exécution finie de l'algorithme de régulation ainsi les temps de conversion A/D et D/A représentant approximativement un retard pur d'une période d'échantillonnage : $T_r \approx h$ [[10], chap.1]. La figure 2.5 page ci-contre montre la réponse indicielle du foehn, système utilisé au laboratoire, comportant tout à la fois retard pur et constantes de temps.

2.2.2 Systèmes à modes apériodiques

Sur la figure 2.6 page suivante sont représentées les réponses indicielles de 2 systèmes. Comme elles ne présentent aucune oscillation, on parle de réponses apériodiques et par suite de systèmes à modes apériodiques.

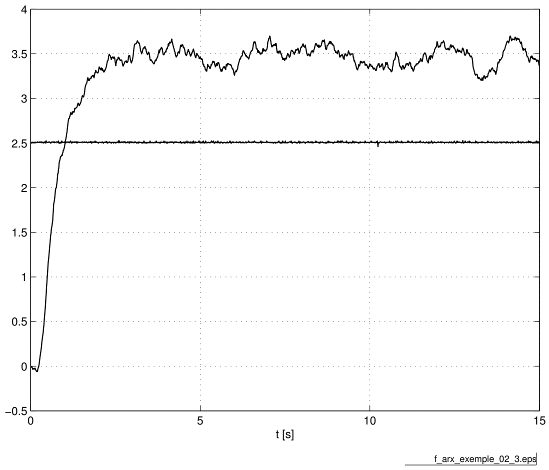


FIG. 2.5 – Réponse indicielle d'un système à retard pur : canal aérothermique ("foehn") du laboratoire d'automatique de l'*eivd*. Le signal d'entrée est un saut de tension aux bornes du corps de chauffe, celui de sortie est la température mesurée. On observe un retard pur de l'ordre de $T_r = 200\,[\mathrm{ms}]$ (fichier source).

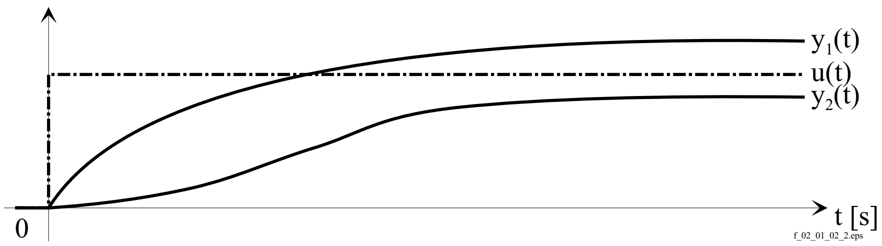


FIG. 2.6 – Réponses indicielles d'un système d'ordre 1 ($y_1(t)$) et d'un système d'ordre élevé ($y_2(t)$) (fichier source).

La réponse indicielle d'un filtre RC passe-bas (§ 2.3.2 page 69) ou celle d'un (petit, i.e. $< 500\,[\mathrm{W}]$) moteur à courant continu (entrée = tension au bornes de l'induit, sortie = vitesse angulaire) ont une allure analogue.

En se référant à l'exemple de la douche présenté au § 1.5.1 page 30, il faut noter que du point de vue d'un régulateur, l'effet d'un retard pur ou celui d'une constante de temps (figure 2.4 page ci-contre) sont assez semblables. Dans les 2 cas, il s'agit d'un comportement dommageable pour la stabilité, puisque la propagation des signaux dans la boucle se voit ralentie. En pratique, on a souvent tendance a parler simplement de "retard", dans un cas comme dans l'autre.

2.2.3 Systèmes à modes oscillatoires et systèmes à déphasage non-minimal

La figure 2.7 illustre le comportement en régime transitoire d'un système ayant tendance à osciller (on dit que l'excitation $u(t)$ a excité le mode oscillatoire de système) ainsi que d'un système vicieux.

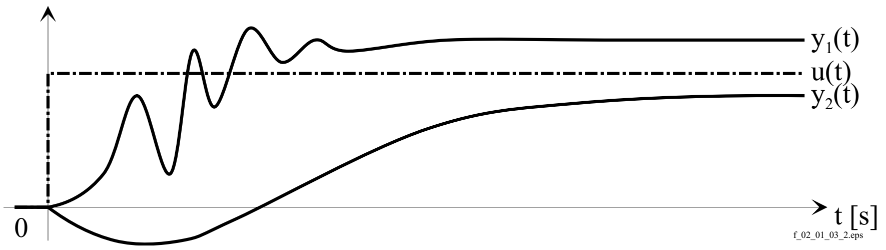


FIG. 2.7 – Réponses indicielles d'un système oscillant ($y_1(t)$) et d'un système à déphasage non-minimal ou "vicieux" ($y_2(t)$) (fichier source).

La figure 2.8 page ci-contre montre la réponse indicielle d'un servo-moteur commandé en couple et entraînant une charge mécanique flexible.

Un système "vicieux", ou plus techniquement, un système à *déphasage non-minimal*, est un système dynamique dont la réponse temporelle typique commence par évoluer en sens contraire de l'excitation. Le circuit de la figure 2.9 en est un exemple, comme le montre sa réponse indicielle (figure 2.10 page 64).

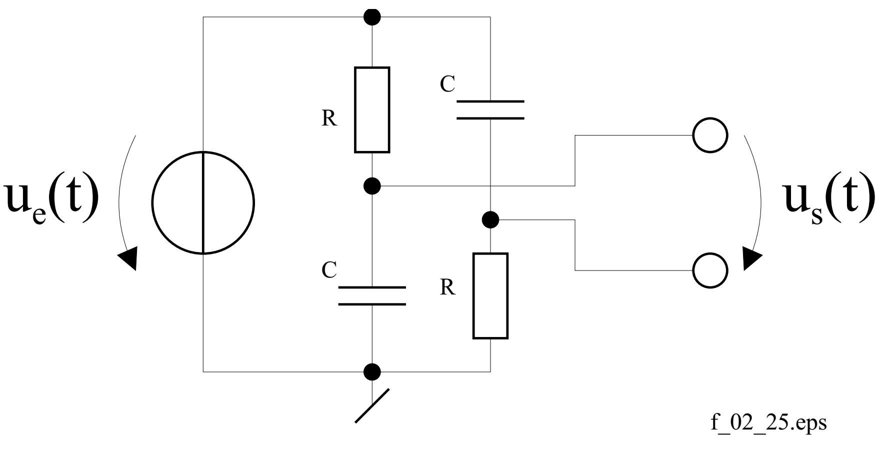
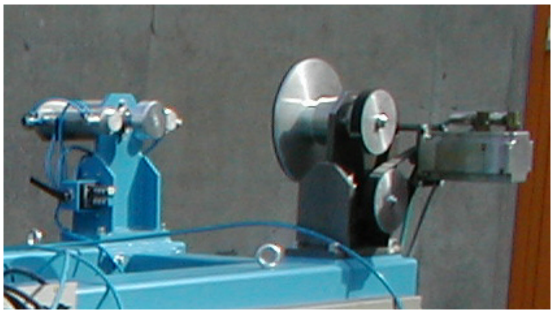


FIG. 2.9 – Schéma technologique d'un système à déphasage non-minimal ou "vicieux". Voir sa réponse indicielle sur la figure 2.10 page 64 (fichier source).



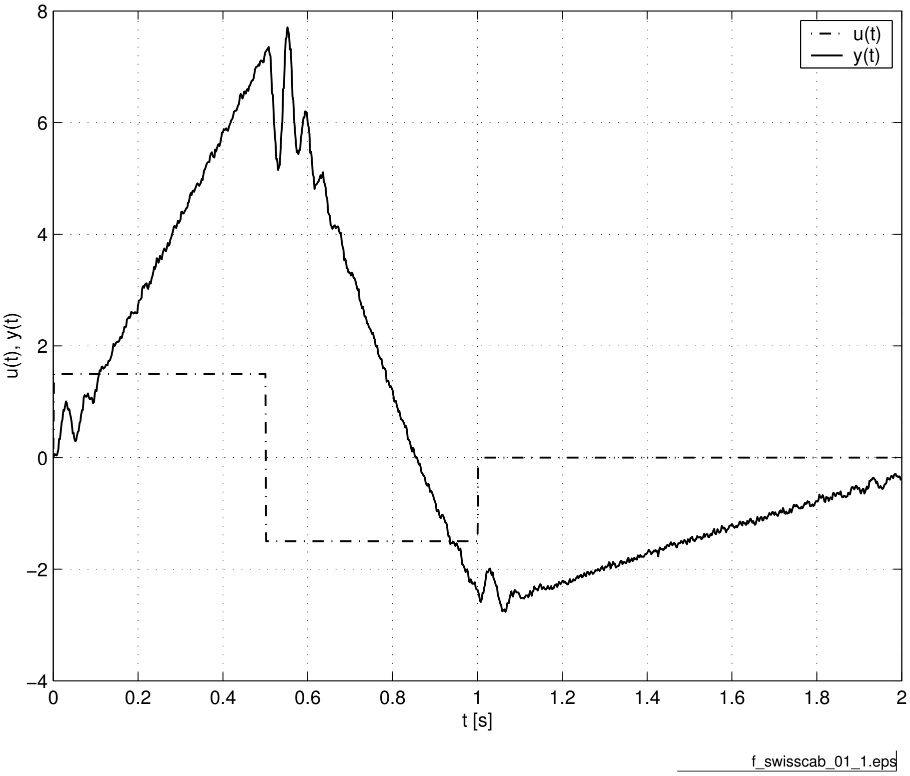


FIG. 2.8 – Réponse indicielle d'un système d'entraînement industriel. Le signal d'entrée $u(t)$ correspond à la consigne de couple du moteur ($u(t) = T_{emc}(t) \approx$ le couple effectif en $[\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}]$) et le signal de sortie est la vitesse de rotation mesurée du moteur ($y(t) = \omega_m(t)$). On observe un comportement intégrateur (§ 2.2.4 page suivante) et oscillatoire (fichier source).

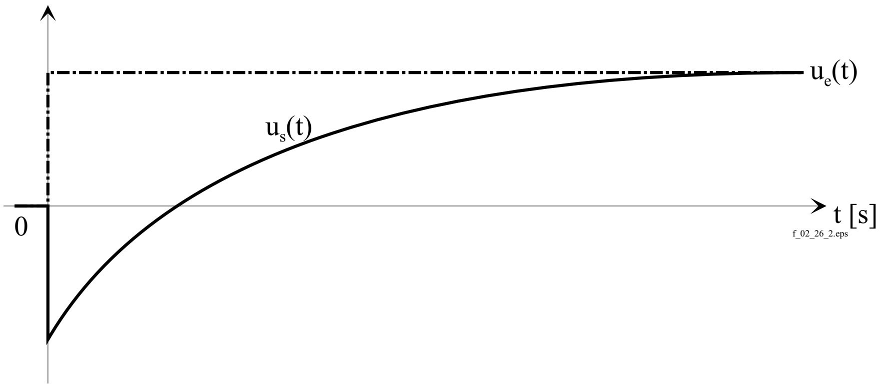


FIG. 2.10 – Réponse indicielle du système à déphasage non-minimal de la figure 2.9 page 62 (fichier source)

2.2.4 Systèmes à comportement intégrateur et dérivateur

Un système possède un comportement intégrateur si sa sortie $y(t)$ est proportionnelle à l'intégrale de son entrée $u(t)$. Lorsque cette dernière prend la forme d'un saut, $y(t)$ est donc une rampe (figure 2.11).

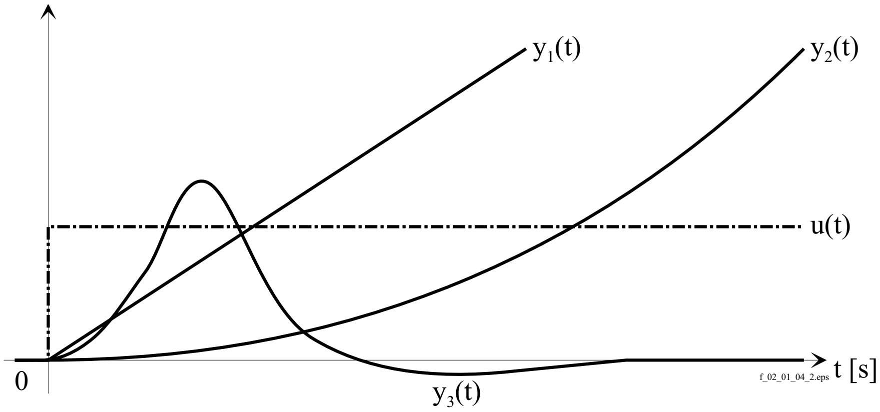


FIG. 2.11 – Réponses indicielles d'un intégrateur pur ($y_1(t)$), de 2 intégrateurs purs ($y_2(t)$) et d'un système à comportement (entre autre) dérivateur ($y_3(t)$) (fichier source)

Un moteur à courant continu présente un comportement intégrateur entre la tension $u_a(t)$ aux bornes de son induit et la position angulaire $\theta(t)$ de la charge mécanique (§ 2.3.4 page 77). On peut montrer facilement [[9], chap.2] que le même moteur, avec l'hypothèse que le frottement visqueux R_f soit nul, présente entre sa tension $u_a(t)$ et le courant d'induit $i_a(t)$ un comportement dérivateur, i.e. tel que les basses fréquences (signaux DC) ne sont pas transmises sur la sortie $i_a(t)$.

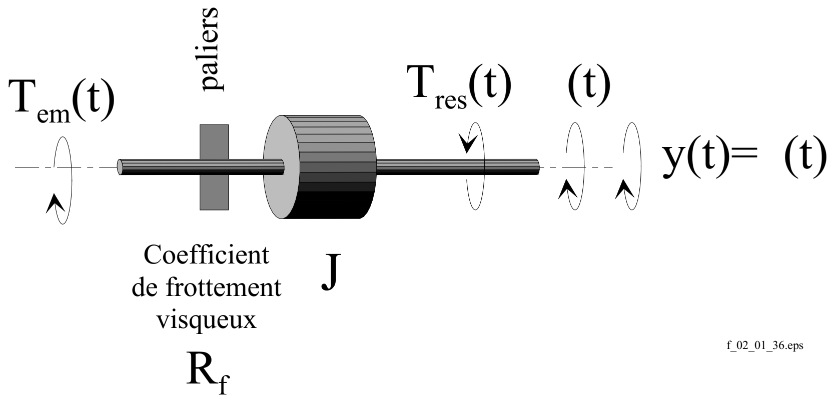


FIG. 2.12 – Schéma technologique d'un système double intégrateur typique. On admet que le couple résistant $T_{res}(t)$ comme le frottement visqueux $R_f \cdot \omega(t)$ sont négligeables (fichier source)

Un système double intégrateur est typiquement rencontré dans des applications d'asservissement de position (machines-outils, machines spéciales), où le couple électromagnétique $T_{em}(t)$ est imposé assez précisément par voie électronique et la position $\theta(t)$ fait office de grandeur réglée (figures 2.12 et 2.13). Avec un frottement visqueux négligeable, on a

$$J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum T_{ext} \approx T_{em}(t)$$

d'où :

$$\theta(t) \approx \frac{1}{J} \cdot \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t'} \theta(\tau) \cdot d\tau \cdot dt'$$

La figure 2.14 page suivante montre le résultats de mesures effectuées sur un

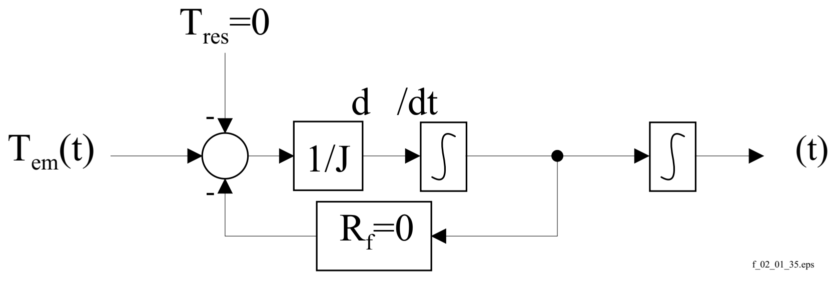


FIG. 2.13 – Schéma fonctionnel du système double intégrateur de la figure 2.12 (fichier source)

système réel double-intégrateur. En complément de la figure 2.14, la figure 2.15

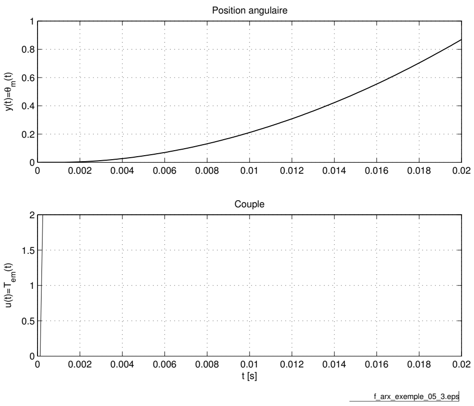


FIG. 2.14 – Réponse indicielle d'un système intégrateur : servo-moteur du laboratoire d'automatique de l'*eivd* . Le signal d'entrée est un saut de couple sur une inertie, celui de sortie est la position angulaire mesurée (fichier source).

montre les résultats obtenus dans les mêmes conditions, lorsque cependant le signal de sortie sélectionné est la vitesse plutôt que la position. L'allure typique en forme rampe alors que le signal d'entrée est un saut traduit bien un comportement intégrateur.

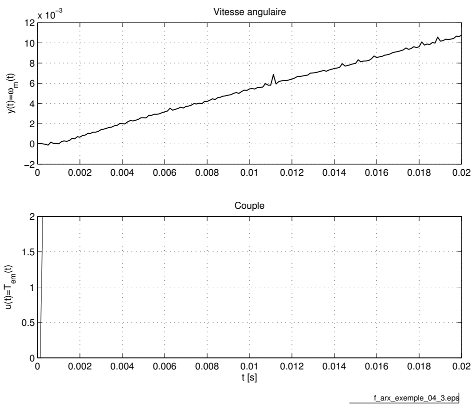


FIG. 2.15 – Réponse indicielle d'un système intégrateur : servo-moteur du laboratoire d'automatique de l'*eivd* . Le signal d'entrée est un saut de couple sur une inertie, celui de sortie est la vitesse angulaire mesurée (fichier source).

2.3 Modélisation de connaissance/représentation des systèmes par leurs équations différentielles

2.3.1 Exemple : Circuit RLC série

On s'intéresse ici à établir le modèle de connaissances (i.e. le modèle mathématique basé sur les lois physiques gouvernant le comportement du système considéré) d'un circuit série RLC (figure 2.16). Le signal d'entrée considéré est la tension $u_e(t)$ alors que le signal de sortie est la tension $u_s(t)$ aux bornes de la capacité.

Schéma technologique

On admet que le système présenté à la figure 2.16 est linéaire, ce qui implique notamment que l'inductance L est constante et ne dépend pas du niveau de courant $i(t)$.

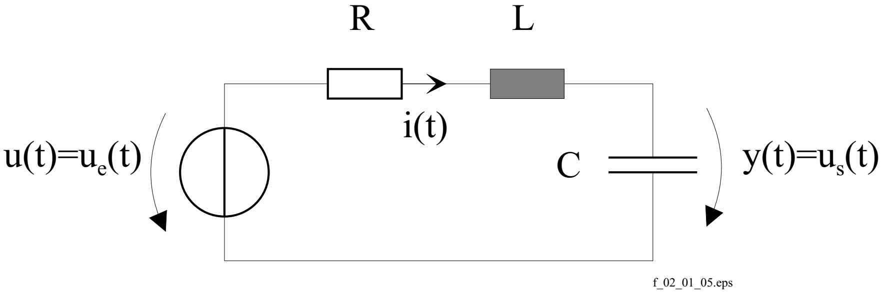


FIG. 2.16 – Circuit RLC linéaire : schéma technologique (fichier source).

Mise en équations

On a, selon les lois de Kirchhoff :

$$u_e(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^{t} i(\tau) \cdot d\tau$$

$$u_s(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^{t} i(\tau) \cdot d\tau$$

Les équations ci-dessus peuvent être remaniées afin de les présenter sous *forme canonique*, i.e. sous une forme telle que l'on ait n équations différentielles d'ordre 1 :

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot i(t) - \frac{1}{L} \cdot u_{\mathsf{s}}(t) + \frac{1}{L} \cdot u_{\mathsf{e}}(t)$$
$$\frac{du_{\mathsf{s}}}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

L'ordre d'un système dynamique linéaire étant le nombre d'équation différentielles d'ordre 1 nécessaires à sa modélisation, on a donc avec le circuit RLC un système d'ordre $n = 2$.

Schéma fonctionnel détaillé

On peut à l'aide de ces équations facilement construire le schéma fonctionnel détaillé (figure 2.17), mettant en évidence la structure interne (du point de vue du comportement dynamique) du système étudié. Une règle de base pour la construction de tels schémas est de n'utiliser que des intégrateurs comme éléments dynamiques, les autres blocs fonctionnels à disposition étant des gains et des comparateurs. Le nombre d'intégrateurs strictement nécessaire est égal à n, soit 2 dans l'exemple traité (*réalisation minimale*).

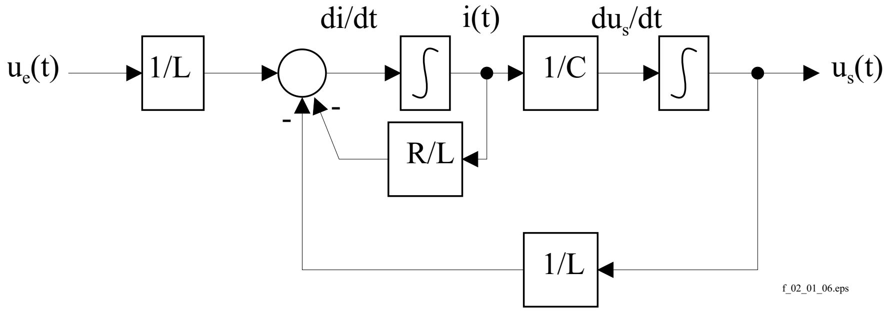


FIG. 2.17 – Schéma fonctionnel détaillé du circuit RLC : les seuls éléments dynamiques autorisés sont des intégrateurs (fichier source).

L'usage de dérivateurs est à éviter, de tels éléments étant physiquement irréalisables. Dans l'optique de la simulation des systèmes dynamiques tels que le circuit RLC étudié, il est fortement recommandé de ne le représenter qu'avec des éléments physiquement réalisables.

Historiquement, les simulations de systèmes dynamiques étaient réalisées à l'aide d'appareils parfois appelés *ordinateurs analogiques*, lesquels permettaient de construire des schémas fonctionnels tels que celui de la figure 2.17 à l'aide d'éléments de base comme le gain, le comparateur/soustracteur et l'intégrateur. Outre le fait qu'il ne soient pas réalisables, les dérivateurs sont à bannir dans un tel cas d'application, à cause de l'amplification du bruit que de tels éléments provoquent. Il faut noter que le problème est toujours d'actualité, même avec des simulateurs modernes, entièrement numériques, comme MATLAB (`http://www.mathworks.com`) ou SysQuake(`http://www.calerga.com`).

Mise en forme : (1 équation différentielle d'ordre $n = 2$)

En notant que

$$i(t) = C \cdot \frac{du_s}{dt}$$

l'équation différentielle d'ordre $n = 2$ devient :

$$u_e(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_s}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_s}{dt^2} + u_s(t)$$

soit encore :

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_s(t) = \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_e(t)$$

2.3.2 Exemple : Filtre passe-bas RC d'ordre 1

Un filtre passe-bas passif d'ordre 1 peut être réalisé par le circuit de la figure 2.18. On sait qu'un tel circuit livre à sa sortie un signal $u_s(t)$ correspondant au signal d'entrée $u_e(t)$ atténué à partir de la pulsation $\omega_p = \frac{1}{R \cdot C}$ au rythme de $-20 \left[\frac{\text{dB}}{\text{déc.}}\right]$.

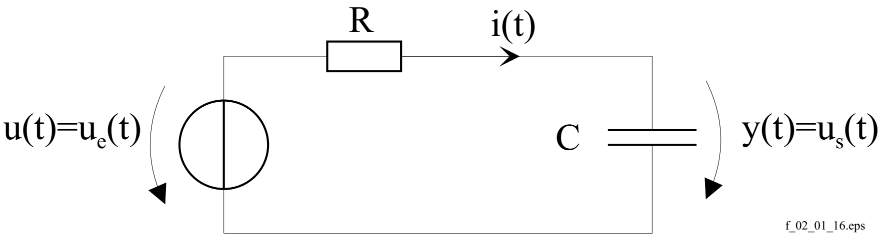


FIG. 2.18 – Filtre passe-bas : schéma technologique (fichier source).

Mise en équations

L'application des lois de Kirchhoff donne :

$$u_e(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^{t} i(\tau) \cdot d\tau$$

$$u_s(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^{t} i(\tau) \cdot d\tau$$

On en déduit le modèle mathématique ($n = 1$ équation différentielle d'ordre 1) :

$$u_e(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_s}{dt} + u_s(t)$$

La mise sous forme canonique donne :

$$\frac{du_s}{dt} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot u_s(t) + \frac{1}{R \cdot C} \cdot u_e(t)$$

Schéma fonctionnel détaillé

Partant de l'équation différentielle décrivant le système "filtre RC passe-bas", on peut en faire la représentation équivalente par schéma fonctionnel de la figure 2.19.

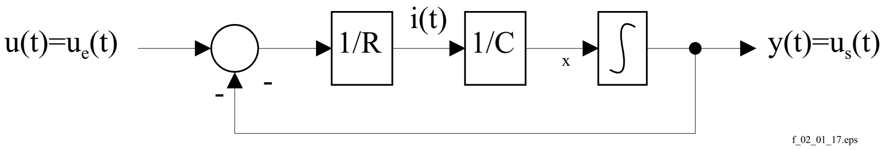


FIG. 2.19 – Schéma fonctionnel détaillé filtre passe-bas RC (fichier source).

Circuit RC : gain statique

Le gain statique du circuit RC étudié est par définition calculé lorsque l'on applique un signal d'entrée $u_e(t)$ constant et que l'on mesure le signal de sortie $u_s(t)$ lorsque $t \to \infty$. Lorsque $u_s(t)$ est stabilisée à une valeur constante (pour $t \to \infty$), on a :

$$\frac{du_s}{dt} = 0 = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot u_s(t) + \frac{1}{R \cdot C} \cdot u_e(t)$$

d'où

$$K = \left. \frac{\lim_{t\to\infty} y(t)}{\lim_{t\to\infty} u(t)} \right|_{u(t)=\text{const.}} = 1$$

Filtre passe-bas RC : réponse indicielle.

La réponse indicielle du filtre passe-bas est esquissée sur la figure 2.20 page ci-contre. Sa forme analytique

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

est obtenue par résolution de l'équation différentielle.

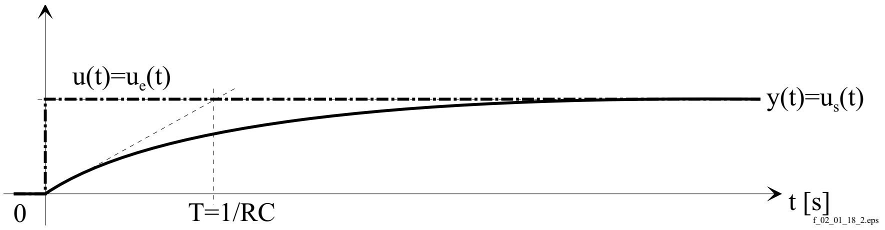


FIG. 2.20 – Réponse indicielle du filtre passe-bas RC (fichier source).

2.3.3 Analogies des systèmes électriques et mécaniques

Les systèmes physiques, même de natures et d'utilisations radicalement différentes, sont souvent régis par des équations différentielles de mêmes structures. On illustre ci-dessous le cas de systèmes mécaniques (masse-dash pot, figure 2.24 page 73) et électriques (circuit RL, figure 2.21).

Circuit RL série : schéma technologique et mise en équations

Le schéma technologique du circuit considéré est donné sur la figure 2.21. La

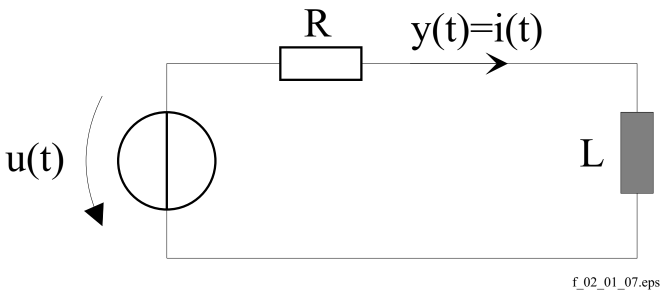


FIG. 2.21 – Circuit RL (fichier source).

mise en équations donne fournit le modèle mathématique :

$$u_e(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt}$$

Présenté sous forme canonique (dérivées premières dans le membre de gauche), on a :

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot i(t) + \frac{1}{L} \cdot u_e(t)$$

Circuit RL série : schéma fonctionnel détaillé

Le modèle mathématique obtenu est représenté graphiquement sur la figure 2.22.

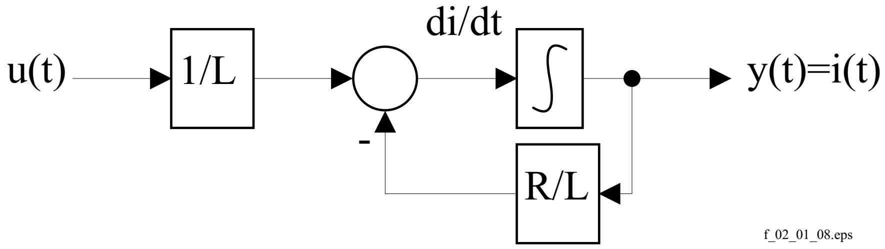


FIG. 2.22 – Schéma fonctionnel détaillé du circuit RL (fichier source).

Circuit RL série : gain statique

Par définition du gain statique, celui-ci se calcule lorsque l'on applique un signal d'entrée constant et que l'on mesure le signal de sortie lorsque $t \to \infty$. Dans l'exemple, le courant i va se stabiliser à une valeur constante. En conséquence, ses dérivées par rapport au temps sont nulles et l'équation différentielle devient

$$\frac{di}{dt} = 0 = -\frac{R}{L} \cdot i(t) + \frac{1}{L} \cdot u_e(t)$$

d'où

$$K = \left.\frac{\lim_{t\to\infty} y(t)}{\lim_{t\to\infty} u(t)}\right|_{u(t)=\text{const.}} = \frac{1}{R}$$

On peut également raisonner sur la base du schéma fonctionnel (figure 2.22) : l'équilibre est atteint lorsque le signal d'entrée de l'intégrateur, i.e. $\frac{di}{dt}$, est nul. On a alors $\frac{1}{L} \cdot u_e(t) = \frac{R}{L} \cdot i(t)$, ce qui amène le même gain statique.

Circuit RL série : réponse indicielle

La réponse indicielle du système étudié est esquissée sur la figure 2.23 page ci-contre. On peut y lire le gain statique ainsi que la constante de temps $\frac{L}{R}$, i.e.la durée que met la réponse pour atteindre $1 - \frac{1}{e} = 63\%$ de sa valeur finale.

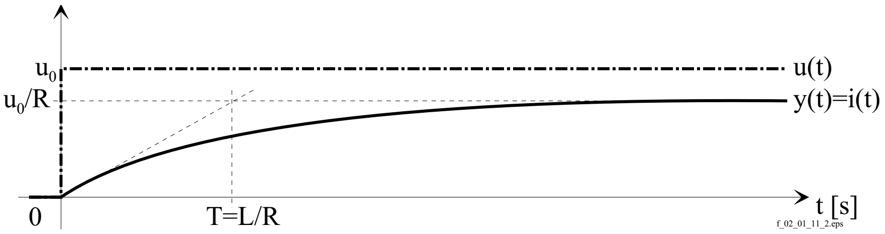


FIG. 2.23 – Réponse indicielle du circuit RL (fichier source).

Système mécanique masse-dash pot

D'un point de vue dynamique, l'équivalent mécanique du circuit RL est un système constitué d'une masse m fixée à un amortisseur "dash pot" créant une force de frottement visqueux admise proportionnelle à la vitesse (figure 2.24). Le signal d'entrée de ce système est la force appliquée $F(t)$ à la masse alors que le signal de sortie est la vitesse $v(t)$ de la masse.

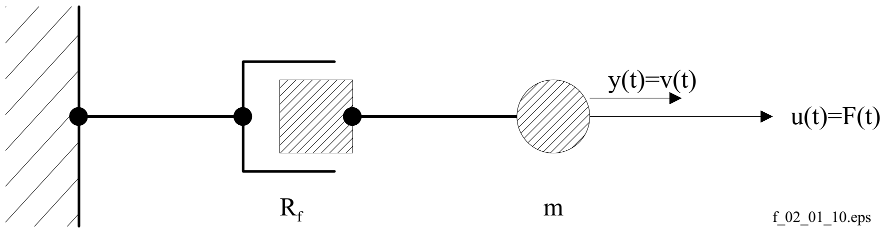


FIG. 2.24 – Système masse-dash pot. Le dash pot crée un fottement visqueux de coefficient R_f $\left[\frac{\mathrm{N}}{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\right]$ proportionnel par hypothèse à la vitesse. Le système est donc linéaire (fichier source).

Le modèle mathématique est obtenu en écrivant l'équation de Newton :

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F(t) - R_f \cdot v(t)$$

Sous forme canonique, on obtient :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \cdot F(t) - \frac{R_f}{m} \cdot v(t)$$

Système masse-dash pot : schéma fonctionnel détaillé

La représentation graphique du modèle est donnée par le schéma fonctionnel de la figure 2.25 page suivante.

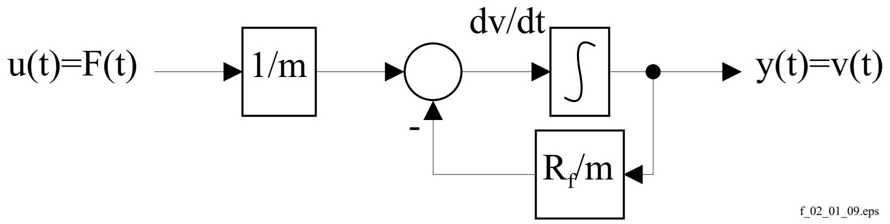


Fig. 2.25 – Schéma fonctionnel détaillé du système masse-dash pot (fichier source).

Système masse-dash pot : gain statique

Par application de la définition, on a, pour le gain statique :

$$K = \left.\frac{\lim_{t\to\infty} y(t)}{\lim_{t\to\infty} u(t)}\right|_{u(t)=\text{const.}} = \frac{1}{R_f}$$

Système masse-dash pot : réponse indicielle

La réponse indicielle peut être obtenue en résolvant l'équation différentielle d'ordre 1. La figure 2.26 en montre un esquisse. L'analogie avec la réponse correspondante du circuit RL (figure 2.23 page précédente) est évidente.

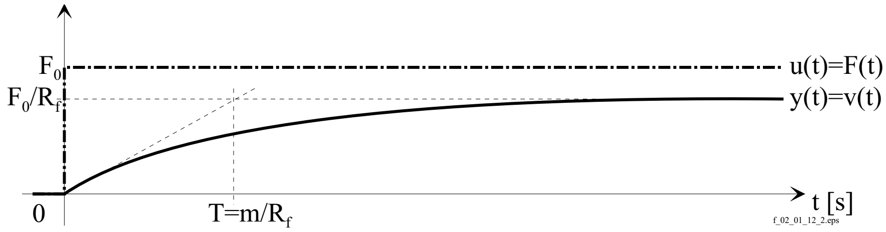


Fig. 2.26 – Réponse indicielle du système masse-dash pot (fichier source).

Comparaisons, analogies

La généralisation des résultats obtenus au paragraphe précédent conduit à établir la liste des analogies des tableaux 2.1 et 2.2.

Ces analogies montrent que les comportements dynamiques des systèmes physiques formés des éléments de base

	Electricité	Mécanique	
$u(t)$	$u_e(t)$	$F(t)$	excitation (signal d'entrée)
$y(t)$	$i(t)$	$v(t)$	réponse (signal de sortie)
	L	m	inertie, stockant l'énergie cinétique
	R	R_f	élément dissipatif
	C	k	ressort, rigidité, élément stockant l'énergie potentielle

TAB. 2.1 – Analogies électrique-mécanique.

– inertie (accumulation d'énergie cinétique)
– élément dissipatif
– rigidité (accumulation d'énergie potentielle)

et régis par les mêmes équations différentielles sont identiques. Cette observation offre la possibilité de reproduire par exemple le comportement dynamique d'un système thermique au moyen d'éléments électriques, ouvrant ainsi la voie à la simulation analogique évoquée au § 2.3.1 page 68.

Electricité	Mécanique	Thermique	Hydraulique	
Tension	Force	Température	Pression	Cause (signal d'entrée, effort)
Courant	Vitesse	Flux	Débit	Effet (signal de sortie, flux)
Inductance	Masse	-	Réservoir	Inertie, stockant l'énergie cinétique
Résistance	Frottement	Coefficient de transfert $\left[\frac{J}{°C \cdot s}\right]$		Elément dissipatif
Capacité	Ressort	Capacité thermique $\left[\frac{J}{°C}\right]$		Ressort, élément stockant l'énergie potentielle. La capacité s'oppose aux variations de sa tension aux bornes ($\rightarrow$ condensateur "tampon"). Le ressort s'oppose à l'allongement

TAB. 2.2 – Analogies de différents systèmes physiques.

2.3.4 Exemple : Moteur DC à excitation séparée constante

Le schéma technologique d'un moteur DC à excitation séparée constante est donné sur la figure 2.27. Le signal d'entrée est la tension aux bornes de l'induit $u_a(t)$ et le signal de sortie est dans le cas de cet exemple la position angulaire $\theta(t)$ de la charge mécanique.

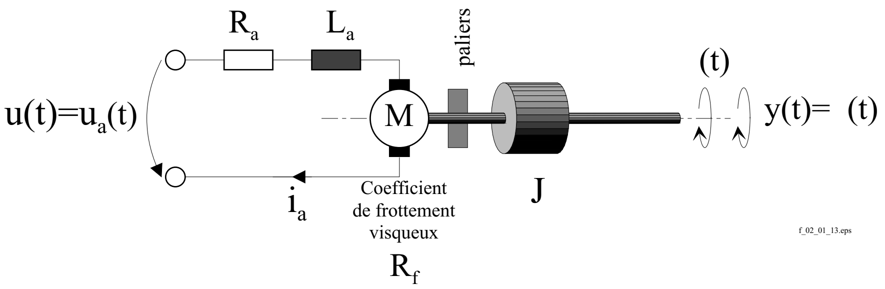


FIG. 2.27 – Moteur DC à excitation séparée constante : schéma technologique. Le signal d'entrée est la tension $u_a(t)$ aux bornes de l'induit alors que le signal de sortie est la position angulaire $\theta(t)$ de l'arbre moteur (fichier source).

Mise en équations : modèles en t et en s

Modèle en t	Modèle en s
$u_a(t) = R_a \cdot i_a(t) + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + e_m(t)$	$U_a(s) = R_a \cdot I_a(s) + L_a \cdot s \cdot I_a(s) + E_m(s)$
$e_m(t) = K_E \cdot \omega(t)$	$E_m(s) = K_E \cdot \Omega(s)$
$T_{em}(t) = K_T \cdot i_a(t)$	$T_{em}(s) = K_T \cdot I_a(s)$
$J_t \cdot \frac{d\omega}{dt} = T_{em}(t) - R_f \cdot \omega(t)$	$J_t \cdot s \cdot \Omega(s) = T_{em}(s) - R_f \cdot \Omega(s)$
$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t)$	$s \cdot \Theta(s) = \Omega(s)$

Schéma fonctionnel détaillé

Aux équations du modèle mathématique correspond le schéma fonctionnel détaillé de la figure 2.28 page suivante.

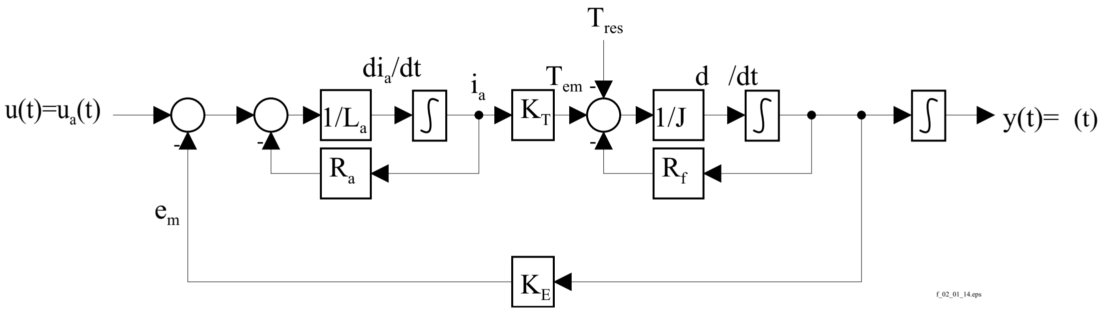


Fig. 2.28 – Schéma fonctionnel détaillé du moteur DC (fichier source).

Application : calcul de la réponse indicielle du système

Profitant des modèles établis ci-dessus, on peut calculer analytiquement la réponse indicielle du système. Au préalable, on peut prévoir l'allure générale de cette réponse indicielle sachant que (figure 2.29) :

- après amortissement des transitoires, la vitesse angulaire $\omega(t)$ sera constante, approximativement fixée par $u_a(t)$;
- de ce fait, l'allure de la position angulaire $\theta(t)$ sera, en régime permanent, l'intégrale d'une constante, soit une rampe.

Le calcul devrait confirmer ces prévisions.

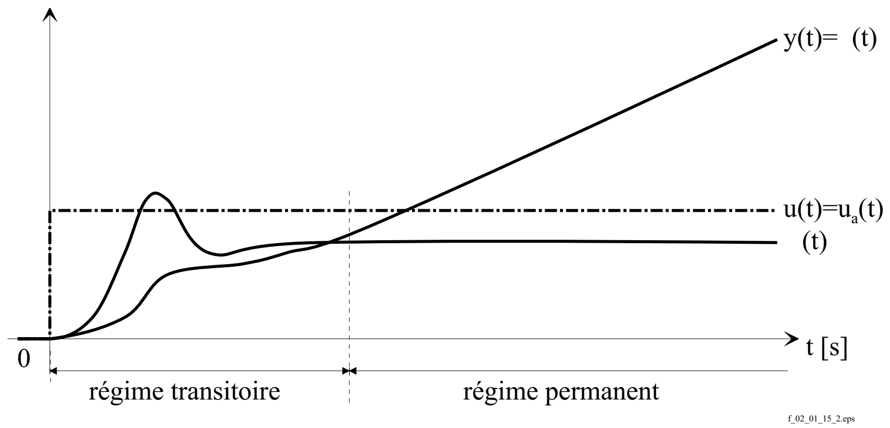


Fig. 2.29 – Réponse indicielle du moteur DC : esquisse des allures probables en régime permanent (fichier source).

On a successivement, partant de la dernière équation :

$$\begin{aligned}
J_t \cdot s \cdot \Omega(s) &= T_{em}(s) - R_f \cdot \Omega(s) \\
(J_t \cdot s + R_f) \cdot \Omega(s) &= T_{em}(s) \\
(J_t \cdot s + R_f) \cdot \Omega(s) &= K_T \cdot I_a(s) \\
I_a(s) &= \frac{1}{K_T} \cdot (J_t \cdot s + R_f) \cdot \Omega(s)
\end{aligned}$$

L'introduction de l'expression de $I_a(s)$ dans la première équation donne :

$$\begin{aligned}
U_a(s) &= (R_a + L_a \cdot s) \cdot I_a(s) + E_m(s) \\
&= (R_a + L_a \cdot s) \cdot \frac{1}{K_T} \cdot (J_t \cdot s + R_f) \cdot \Omega(s) + K_E \cdot \Omega(s) \\
&= \left[(R_a + L_a \cdot s) \cdot \frac{1}{K_T} \cdot (J_t \cdot s + R_f) + K_E\right] \cdot \Omega(s) \\
&= \frac{1}{K_T} \cdot [(R_a + L_a \cdot s) \cdot (J_t \cdot s + R_f) + K_E \cdot K_T] \cdot \Omega(s) \\
&= \frac{1}{K_T} \cdot \left(R_a \cdot R_f + s \cdot (R_a \cdot J_t + R_f \cdot L_a) + s^2 \cdot L_a \cdot J_t + K_E \cdot K_T\right) \cdot \Omega(s) \\
&= \frac{R_a \cdot R_f + K_E \cdot K_T}{K_T} \cdot \left(1 + s \cdot \frac{R_a \cdot J_t + R_f \cdot L_a}{R_a \cdot R_f + K_E \cdot K_T} + s^2 \cdot \frac{L_a \cdot J_t}{R_a \cdot R_f + K_E \cdot K_T}\right) \cdot \Omega(s)
\end{aligned}$$

On en déduit $\Omega(s)$:

$$\Omega(s) = \frac{K_T}{R_a \cdot R_f + K_E \cdot K_T} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \frac{R_a \cdot J_t + R_f \cdot L_a}{R_a \cdot R_f + K_E \cdot K_T} + s^2 \cdot \frac{L_a \cdot J_t}{R_a \cdot R_f + K_E \cdot K_T}} \cdot U_a(s)$$

et finalement $\Theta(s) = \frac{1}{s} \cdot \Omega(s)$

$$\begin{aligned}
\Theta(s) &= \frac{\frac{K_T}{R_a \cdot R_f + K_E \cdot K_T}}{s} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \frac{R_a \cdot J_t + R_f \cdot L_a}{R_a \cdot R_f + K_E \cdot K_T} + s^2 \cdot \frac{L_a \cdot J_t}{R_a \cdot R_f + K_E \cdot K_T}} \cdot U_a(s) \\
&= \frac{K_a}{s} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot T_m + s^2 \cdot T_m \cdot T_e} \cdot U_a(s)
\end{aligned}$$

où T_m et T_e sont respectivement les constantes de temps mécanique et électrique du moteur et de charge.

Moteur DC : gain statique

Le raisonnement ci-dessus a montre que le gain statique de système tend vers l'infini, puisque $\lim_{t\to\infty} \theta(t) = \infty$

$$K = \left.\frac{\lim_{t\to\infty} y(t)}{\lim_{t\to\infty} u(t)}\right|_{u(t)=\text{const.}} \to \infty$$

2.3.5 Généralisation

Tout système dynamique linéaire peut être modélisé, i.e. représenté par :

– 1 équation différentielle d'ordre n :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y(t) = \\ b_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_0 \cdot u(t)$$

– n équations différentielles d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11} \cdot x_1(t) + a_{12} \cdot x_2(t) + \ldots + a_{1n} \cdot x_n(t) + b_1 \cdot u(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21} \cdot x_1(t) + a_{22} \cdot x_2(t) + \ldots + a_{2n} \cdot x_n(t) + b_2 \cdot u(t) \\
&\ldots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1} \cdot x_1(t) + a_{n2} \cdot x_2(t) + \ldots + a_{nn} \cdot x_n(t) + b_n \cdot u(t) \\
y(t) &= c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t) + \ldots + c_n \cdot x_n(t) + d \cdot u(t)
\end{aligned}$$

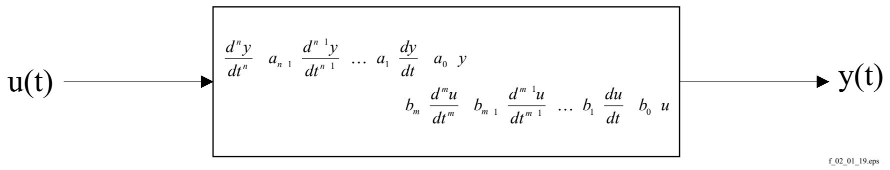


FIG. 2.30 – Système dynamique mono-variable représenté par une équation différentielle d'ordre n (fichier source).

2.4 Représentation par la réponse impulsionnelle

La réponse $y(t)$ du système à n'importe quelle entrée $u(t)$ est donnée par le *produit de convolution*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau = g(t) * u(t)$$

où $g(t)$ est la réponse impulsionnelle du système considéré. Celle-ci est obtenue en excitant le système avec une impulsion de Dirac.

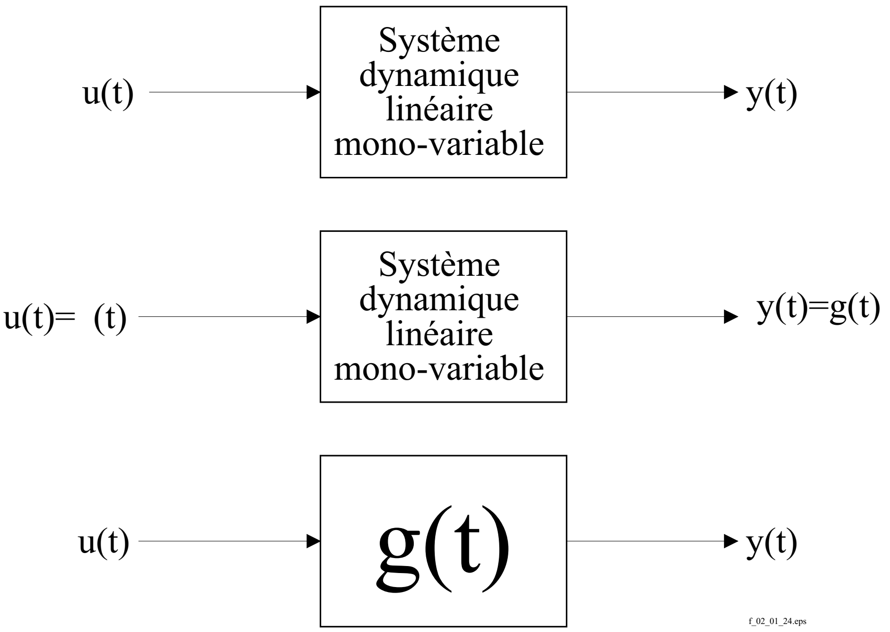


Fig. 2.31 – Représentation d'un système dynamique linéaire par sa réponse impulsionnelle $g(t)$ (fichier source).

2.5 Représentation par la fonction de transfert (transmittance isomorphe)

2.5.1 Définition

La fonction de transfert $G(s)$ d'un système dynamique linéaire est donnée par la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle :

$$\boxed{G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}}$$

Connaissant $G(s)$, il est possible de calculer la réponse $y(t)$ du système à toute entrée $u(t)$:

$$y(t) = g(t) * u(t) \longrightarrow Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(G(s) \cdot U(s)\right)$$

On peut en déduire une autre définition de $G(s)$:

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}\left\{y(t)\right\}}{\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}}}$$

Le système étant linéaire, $G(s)$ est bien sûr indépendante de l'entrée appliquée $u(t)$.

Il va sans dire que $G(s)$ représente complètement le système dynamique linéaire, au même titre que l'équation différentielle d'ordre n le régissant. On peut dès lors sans autre l'utiliser dans les schémas fonctionnels (figure 2.32).

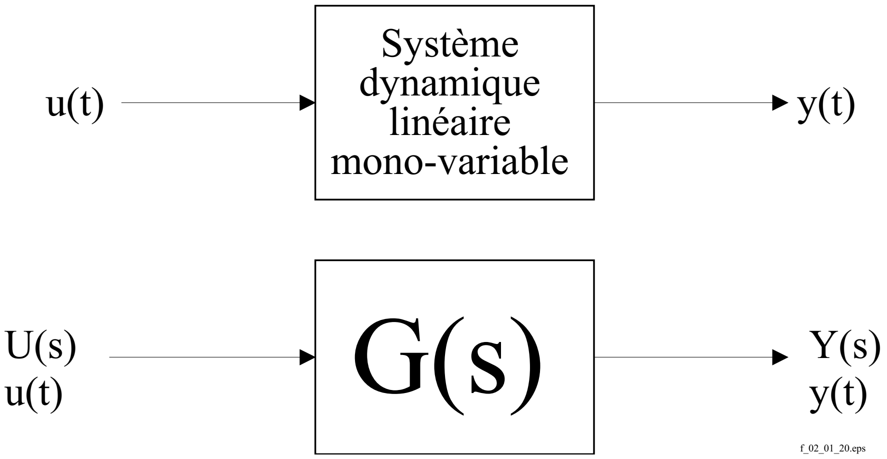


FIG. 2.32 – La fonction de transfert $G(s)$ représente le système (fichier source).

2.5.2 Forme de $G(s)$

$G(s)$ a la forme d'une fraction rationnelle en s : partant de l'équation différentielle d'ordre n

$$a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_0 \cdot u(t)$$

la transformée de Laplace des 2 membres donne :

$$a_n \cdot s^n \cdot Y(s) + a_{n-1} \cdot s^{n-1} \cdot Y(s) + \ldots + a_1 \cdot s \cdot Y(s) + a_0 \cdot Y(s) = b_m \cdot s^m \cdot U(s) + b_{m-1} \cdot s^{m-1} \cdot U(s) + \ldots + b_1 \cdot s \cdot U(s) + b_0 \cdot U(s)$$

d'où :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0}$$

Sous forme factorisée, on a :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \ldots \cdot (s - z_m)}{(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot \ldots \cdot (s - s_n)}$$

Il est vivement recommandé, lorsque l'on présente une fonction de transfert $G(s)$, d'indiquer quelles en sont les entrée $U(s)$ et sortie $Y(s)$ en s'astreignant à écrire

$$G(s) = \frac{\overbrace{Y(s)}^{\text{nom du signal de sortie}}}{\underbrace{U(s)}_{\text{nom du signal d'entree}}} = \frac{\ldots}{\ldots}$$

afin de lever toute ambiguité quant au système correspondant.

2.5.3 Pôles et zéros, ordre et degré relatif

Les nombres s_1 à s_n, i.e. les valeurs de s pour lesquelles le dénominateur de $G(s)$ s'annule, sont les *pôles* de $G(s)$. Ceux-ci s'obtiennent donc en posant :

$$d_c(s) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0 = 0$$

qui n'est autre que *l'équation caractéristique* associée à l'équation différentielle d'ordre n régissant le système.

Les *zéros* z_1 à z_m de $G(s)$ sont les valeurs de s annulant le numérateur de $G(s)$.

Il y a n pôles et m zéros pouvant être réels ou complexes. n est l'ordre du système. Le nombre $d = n - m$ est appelé le *degré relatif* du système (voir § 4.3.6 page 169).

2.5.4 Exemple : moteur DC

La fonction de transfert du moteur DC du § 2.3.4 page 77 est :

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{\Theta(s)}{U_a(s)} \\ &= \frac{K_T}{R_a \cdot R_f + K_T \cdot K_E} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \frac{J_t \cdot R_a + L_a \cdot R_f}{R_a \cdot R_f + K_T \cdot K_E} + s^2 \cdot \frac{L_a \cdot J_t}{R_a \cdot R_f + K_T \cdot K_E}} \end{aligned}$$

La simulation et l'analyse avec MATLAB ou SysQuake peuvent s'effectuer comme suit :

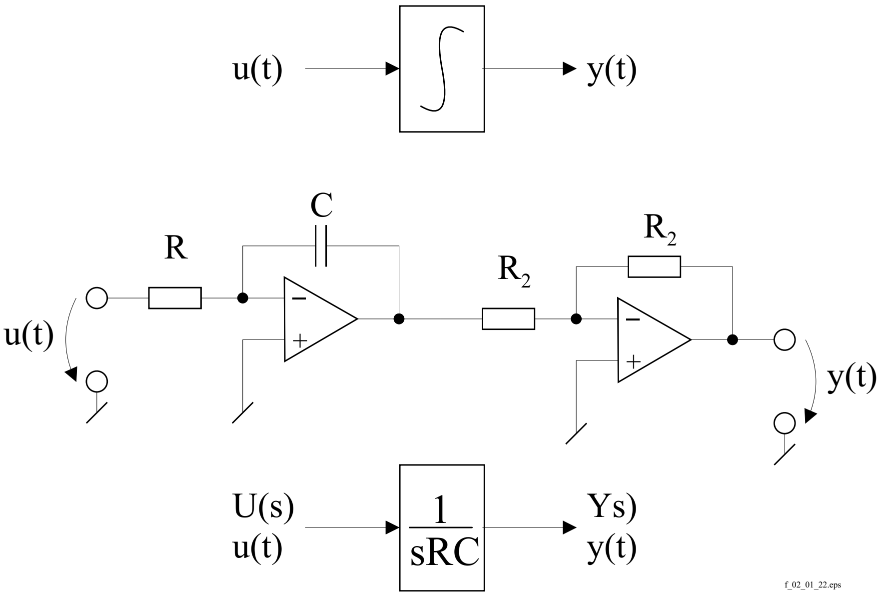


FIG. 2.33 – Intégrateur, symboles fonctionnels et réalisation électronique (schéma technologique) de principe (fichier source).

```
>> numG = KT/(Ra *Rf + KT *KE);
>> denG = [La*Jt/(Ra *Rf + KT *KE), (Jt *Ra + La*Rf)/(Ra *Rf + KT *KE), 1, 0];
%       [              s^3            ,              s^2                , s^1, s^0]
>> figure(1)
>> step(numG, denG)
>> figure(2)
>> impulse(numG, denG)
>> figure(3)
>> bode(numG, denG)
```

2.5.5 Exemple : Intégrateur

$$y(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot \int_{-\infty}^{t} u(\tau) \cdot d\tau$$

$$Y(s) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot \frac{1}{s} \cdot U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{R \cdot C} \cdot \frac{1}{s}$$

Introduction dans MATLAB ou SysQuake

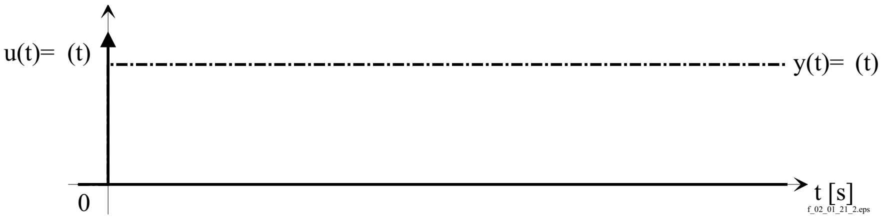


FIG. 2.34 – Réponse impulsionnelle de l'intégrateur (fichier source).

```
>> numG = 1/(R *C);
>> denG = [1,0];
%         [s ^1, s ^0]
```

Vérification $G(s)$ est bel et bien égale à la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle $g(t)$ du système. Dans ce cas particulier, on peut en effet aisément voir que si l'entrée est une impulsion de Dirac

$$u(t) = \delta(t)$$

alors la sortie est un saut

$$y(t) = g(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot \epsilon(t)$$

Or :

$$\mathcal{L}\left\{y(t) = g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{R \cdot C} \cdot \epsilon(t)\right\} = \frac{1}{R \cdot C \cdot s} = G(s)$$

2.5.6 Configuration pôles-zéros

Il est utile de représenter graphiquement la position des pôles et des zéros de $G(s)$ dans le plan complexe (plan de s). Pour

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \frac{1}{(R_{f1} + R_{f2})} \cdot \frac{s \cdot \left(1 + \frac{R_{f2}}{k} \cdot s + \frac{J_2}{k} \cdot s^2\right)}{\left(1 + s \cdot \frac{\left((J_1 + J_2) \cdot k + R_{f1} \cdot R_{f2}\right)}{k \cdot \left(R_{f1} + R_{f2}\right)} + s^2 \cdot \frac{\left(J_1 \cdot R_{f2} + J_2 \cdot R_{f1}\right)}{k \cdot \left(R_{f1} + R_{f2}\right)} + s^3 \cdot \frac{J_1 \cdot J_2}{k \cdot \left(R_{f1} + R_{f2}\right)}\right)} \end{aligned}$$

la configuration pôles-zéros est donnée à la figure 2.35 page suivante. Les pôles sont représentés par des x et les zéros par des o.

La configuration pôle-zéro peut être obtenue avec MATLAB ou SysQuake

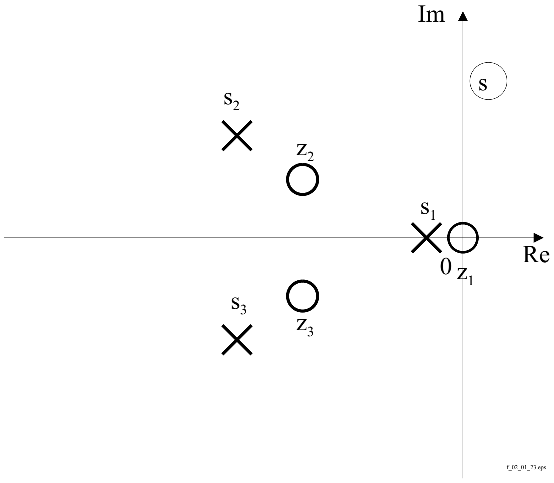


FIG. 2.35 – Configuration pôles-zéros d'un système complexe à résonance et anti-résonance : la fonction de transfert est celle du système mécanique de la figure 2.36 page ci-contre, calculée entre le couple électromagnétique $T_{em}(t)$ et l'accélération angulaire $\alpha_1(t)$ du moteur (voir exercice) (fichier source).

```
>> numG = 1/(Rf1+Rf2) *[J2/k, Rf2/k, 1, 0];
>> denG = [J1*J2/(k*(Rf1+Rf2)),(J1 *Rf2+J2*Rf1)/(k *(Rf1+Rf2)),...
>> (k*(J1+J2)+Rf1 *Rf2)/(k *(Rf1+Rf2)),1];
>> figure(4)
>> pzmap(numG, denG)
```

2.5.7 Type α d'un système

Le *type* α d'un système est égal au nombre de pôlés en $s = 0\,[\mathrm{s}^{-1}]$ que possède ce système, i.e. le nombre d'intégrateurs purs entre son entrée et sa sortie.

Exemples

- $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$: $\alpha = 1$
- $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 \cdot (1+s \cdot T)}$: $\alpha = 2$
- $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{(1+s \cdot T)}$: $\alpha = 0$
- $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_T}{R_a \cdot R_f + K_T \cdot K_E} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+s \cdot \frac{J_t \cdot R_a + L_a \cdot R_f}{R_a \cdot R_f + K_T \cdot K_E} + s^2 \cdot \frac{L_a \cdot J_t}{R_a \cdot R_f + K_T \cdot K_E}}$: $\alpha = 1$

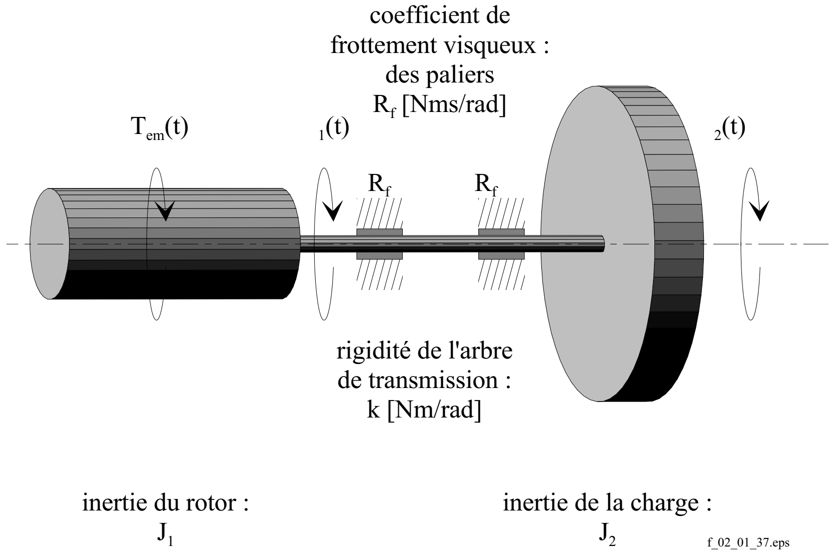


FIG. 2.36 – Schéma technologique d'un système mécanique ayant une transmission flexible (voir exercice) (fichier source).

2.5.8 Présentation des fonctions de transfert

Forme de Bode

De façon à mettre en évidence des paramètres importants des systèmes tels que le gain permanent $K = \lim_{s \to 0} s^{\alpha} \cdot G(s)$ et les constantes de temps, il est extrêmement utile de présenter la fraction rationnelle $G(s)$ sous **forme de Bode**, i.e. sous une forme où les coefficients des plus basses puissances de s des numérateur et dénominateur de la fonction de transfert $G(s)$ soient unitaires :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \overbrace{\frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0}}^{\text{forme quelconque}}$$

$$= \overbrace{\underbrace{\frac{b_0}{a_0}}_{K} \cdot \frac{1 + \frac{b_1}{b_0} \cdot s + \frac{b_2}{b_0} \cdot s^2 + \ldots + \frac{b_m}{b_0} \cdot s^m}{1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot s + \frac{a_2}{a_0} \cdot s^2 + \ldots + \frac{a_n}{a_0} \cdot s^n}}^{\text{forme de Bode}}$$

$$= \overbrace{\frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{(1 + s \cdot T_1^*) \cdot (1 + s \cdot T_2^*) \cdot \ldots \cdot (1 + s \cdot T_m^*)}{(1 + s \cdot T_1) \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{2 \cdot \zeta}{\omega_n} \cdot s + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot s^2\right)}_{\text{pas factorisable, pôles complexes}} \cdot \ldots (1 + s \cdot T_n)}}^{\text{forme de Bode factorisée}}$$

Exemples :

– $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{5\cdot s+4} = \underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{gain permanent}} \cdot \frac{1}{1+s\cdot \underbrace{\frac{5}{4}}_{\text{constante de temps}}}$

– $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{s\cdot(5\cdot s+4)} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s\cdot(1+s\cdot\frac{5}{4})} \left(= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s+s^2\cdot\frac{5}{4}}\right)$

Notons que chaque fois que cela est possible sans effort particulier, on préférera sans aucun doute la forme factorisée, laquelle met clairement en évidence les constantes de temps et autre éléments dynamiques (taux d'amortissement ζ, pulsation propre non-amortie ω_n, voir § 2.6.2 page 92).

Forme de Laplace ou d'Evans

Avec la forme de Laplace, on s'arrange pour que les coefficients des plus hautes puissances de s des numérateur et dénominateur soient unitaires :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \overbrace{\frac{b_m\cdot s^m + b_{m-1}\cdot s^{m-1} + \ldots + b_1\cdot s + b_0}{a_n\cdot s^n + a_{n-1}\cdot s^{n-1} + \ldots + a_1\cdot s + a_0}}^{\text{forme quelconque}}$$

$$= \overbrace{\underbrace{\frac{b_m}{a_n}}_{k} \cdot \frac{s^m + \frac{b_{m-1}}{b_m}\cdot s^{m-1} + \ldots + \frac{b_0}{b_m}}{s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot s^{n-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}}}^{\text{forme de Laplace}}$$

$$= \overbrace{\frac{b_m}{a_n}\cdot \frac{(s-z_1)\cdot(s-z_2)\cdot\ldots(s-z_m)}{(s-s_1)\cdot \underbrace{\left((s+\delta)^2+\omega_0^2\right)}_{\text{pas factorisable, pôles complexes}} \cdot\ldots(s-s_n)}}^{\text{forme de Laplace factorisée}}$$

Exemples :
– $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{5\cdot s+4} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s+\frac{4}{5}}$
– $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{s\cdot(5\cdot s+4)} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s\cdot(s+\frac{4}{5})}$

Remarque

En pratique, ce sont les formes factorisées qui sont les plus utilisables. On factorise donc chaque fois qu'on le peut ! L'opération inverse (effectuer) est rare.

2.6 Systèmes fondamentaux

Un système dynamique linéaire est fondamental si :
- il est d'ordre $n = 1$

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + s \cdot T}$$

ou d'ordre $n = 2$ à pôles **complexes** ($\Delta = a_1^2 - 4 \cdot a_2 < 0$)

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2}$$

- il est de type $\alpha = 0$
- il n'a pas de zéro

2.6.1 Système fondamental d'ordre 1

La fonction de transfert d'un système fondamentale d'ordre 1 est donnée ci-dessous :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + s \cdot T} = \frac{K}{T} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T}} = \frac{k}{s - s_1}$$

T est la constante de temps du système alors que $s_1 = -\frac{1}{T}$ en est le pôle et K le gain statique.

A cette fonction de transfert correspond l'équation différentielle :

$$T \cdot \frac{dy}{dt} + y(t) = K \cdot u(t)$$

Système fondamental d'ordre 1 : réponses temporelles

Le mode temporel de $G(s)$ peut être mis en évidence en excitant le système avec une impulsion de Dirac ou en laissant le système retrouver son état d'équilibre lors que ses (sa) conditions initiales sont non-nulles. On a :

$$Y(s) = G(s) \cdot \underbrace{U(s)}_{\mathcal{L}\{\delta(t)\}=1} = \frac{k}{s - s_1}$$

d'où :

$$y(t) = g(t) = k \cdot e^{s_1 \cdot t} = k \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

C'est un mode exponentiel, apériodique (figure 2.37 page suivante).

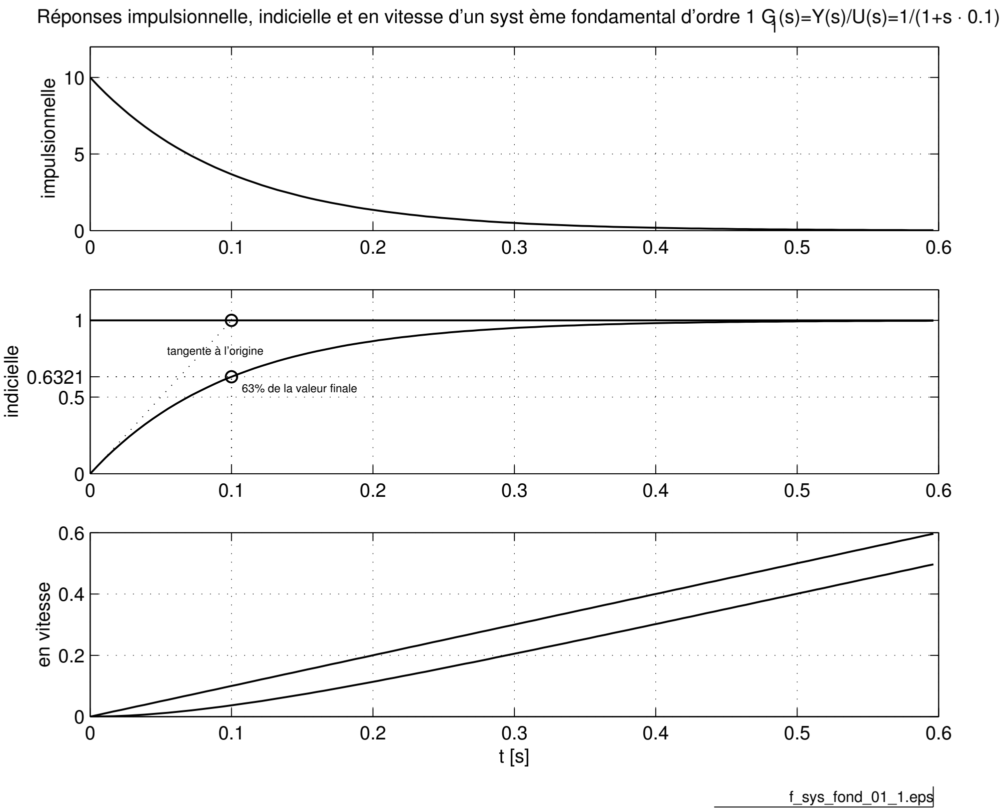


FIG. 2.37 – Réponses impulsionnelle $g(t)$, indicielle $\gamma(t)$ et à une rampe (appelée réponse en vitesse) d'un système fondamental d'ordre 1. On voit sur la réponse indicielle que la constante de temps T correspond au temps nécessaire au signal pour atteindre $(1-\frac{1}{e}) \approx 63\%$ de sa valeur finale, ou encore au temps que mettrait la tangente à la réponse en $t = 0$ [s] pour atteindre la valeur finale y_∞. D'autre part, la pente de la tangente à la réponse, en $t = 0$ [s], est non-nulle (fichier source).

Système fondamental d'ordre 1 : mode temporel

Le mode temporel d'un système fondamental d'ordre 1 est de type *apériodique*. Son expression analytique est

$$\boxed{e^{s_1 \cdot t}}$$

La forme du mode est dépendante de la position du pôle s_1 sur l'axe réel du plan de s (figure 2.38 page suivante).

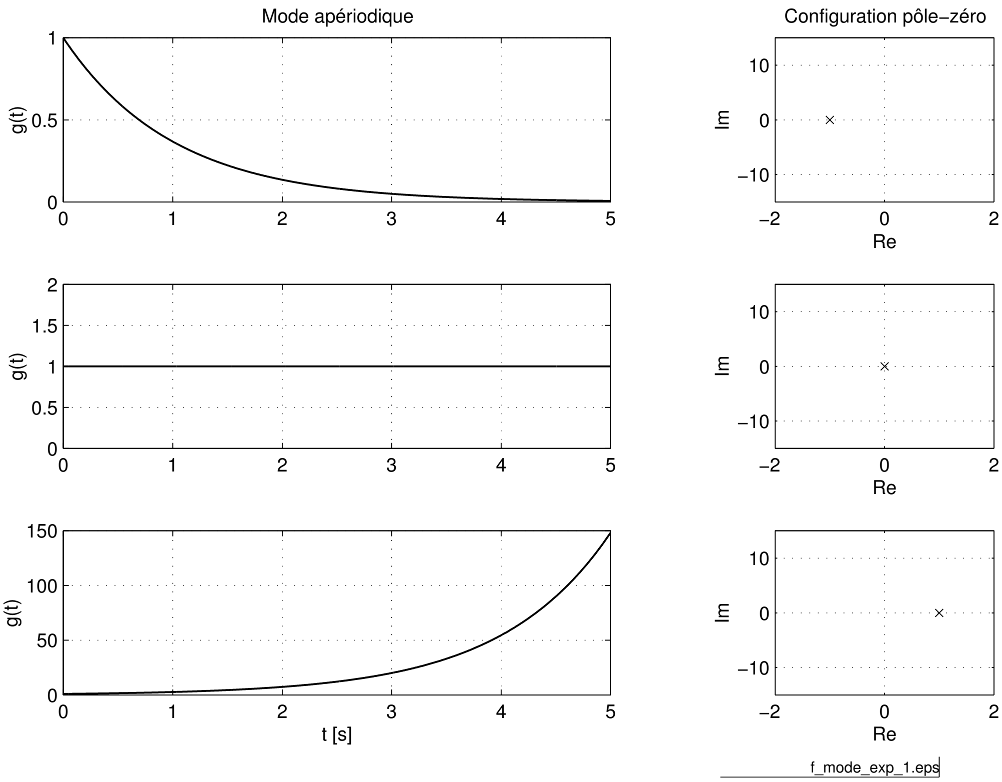


FIG. 2.38 – Si le pôle s_1 est situé à gauche de l'axe imaginaire, le système retrouve un état d'équilibre, ce qui n'est pas le cas si ce même pôle se trouve sur l'axe imaginaire (stabilité marginale) ou a droite de celui-ci (instabilité). La notion de stabilité sera définie précisément au chap.5 (fichier source).

Système fondamental d'ordre 1 : influence de la position du pôle s_1 sur la rapidité

Voir figure 2.39 page suivante.

Système fondamental d'ordre 1 : réponse harmonique

La méthode de calcul de la réponse harmonique a déjà été utilisée lors de cours précédents (théorie des circuits, systèmes analogiques, etc). La démonstration rigoureuse prouvant que le calcul peut se faire en substituant $j \cdot \omega$ à s dans la fonction de transfert sera faite au chap.6. Voir figure 2.40 page 93.

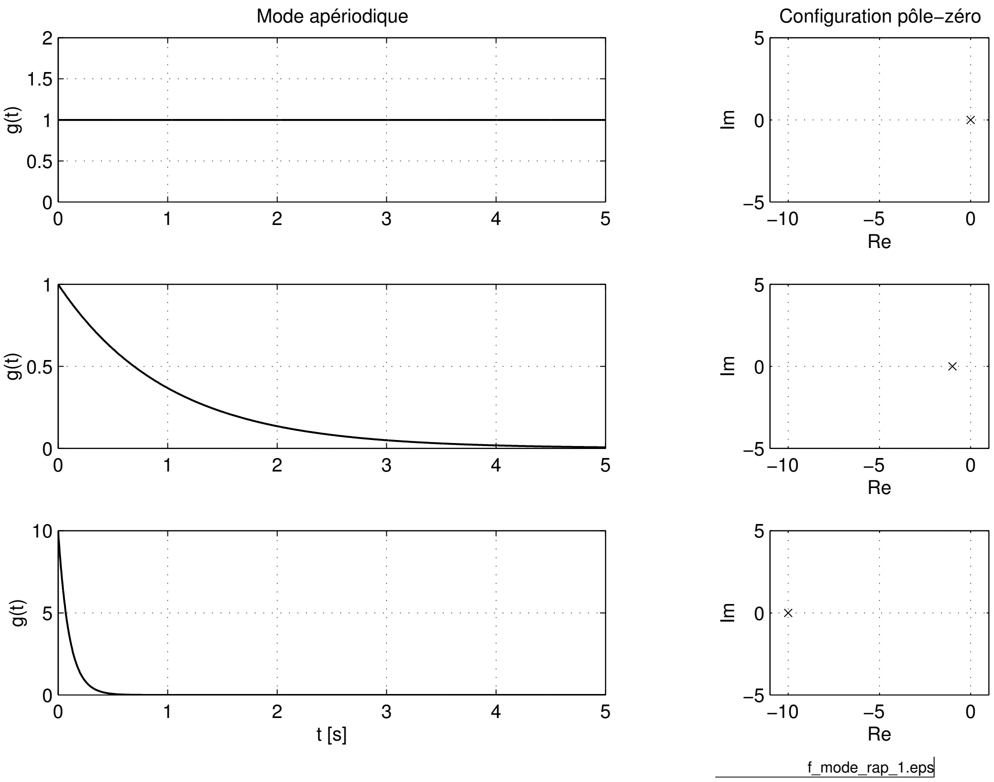


Fig. 2.39 – Plus le pôle s_1 est située à gauche de l'axe imaginaire, i.e. plus la constante de temps correspondante $T = -\frac{1}{s_1}$ est petite, plus le mode est rapide (fichier source).

2.6.2 Système fondamental d'ordre 2

La fonction de transfert d'un système fondamental d'ordre 2 est la suivante :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot s + \frac{a_2}{a_0} \cdot s^2} = \frac{K}{1 + s \cdot \frac{2 \cdot \zeta}{\omega_n} + s^2 \cdot \frac{1}{\omega_n^2}}$$

$$= \underbrace{\frac{K}{1 + s \cdot \frac{2 \cdot \zeta}{\omega_n} + s^2 \cdot \frac{1}{\omega_n^2}}}_{\text{forme de Bode}} = \underbrace{\frac{k}{(s+\delta)^2 + \omega_0^2}}_{\text{forme de Laplace}}$$

Cette fonction de transfert correspond à l'équation différentielle :

$$a_2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t)$$

Les pôles du système sont en

$$s_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_0$$

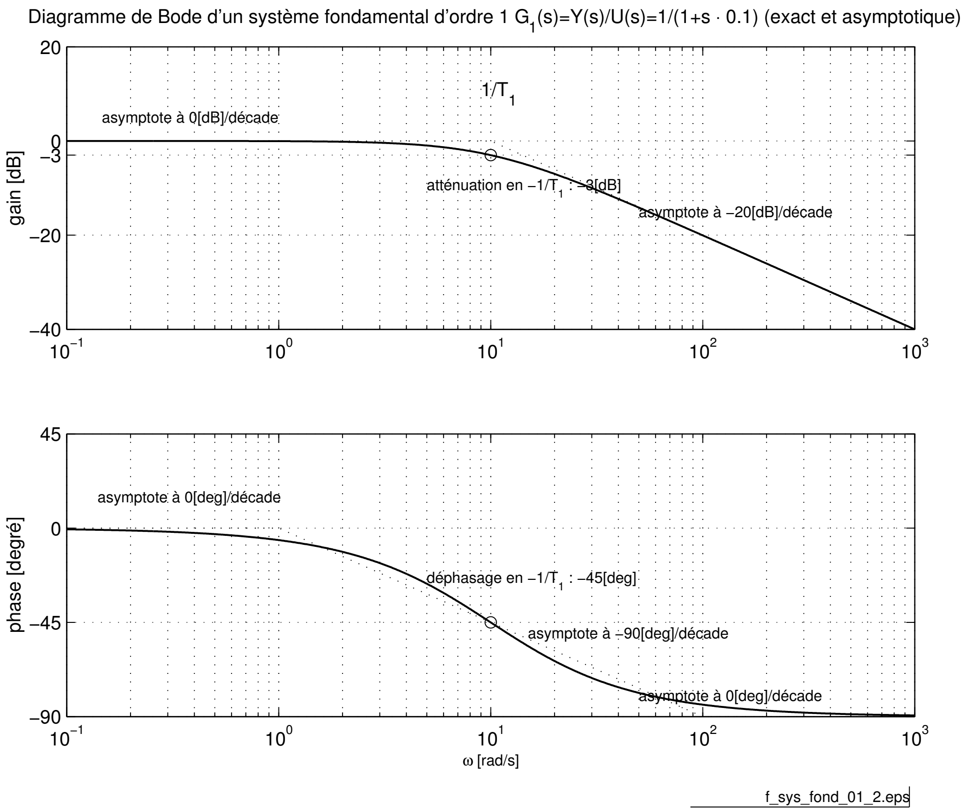


FIG. 2.40 – Réponse harmonique $G(j \cdot \omega)$, i.e. fréquentielle, d'un système fondamental d'ordre 1. Cette réponse est facilement approximable par 2 asymptotes de gain (0 $\left[\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\right]$ jusqu'à $\omega_n = \frac{1}{T} = |s_1|$ et -20 $\left[\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\right]$ ensuite) et 3 asymptotes de phase (0 $\left[\frac{\circ}{\text{dec}}\right]$ jusqu'à $\frac{\omega_n}{10} = 0.1 \cdot \frac{1}{T} = 0.1 \cdot |s_1|$, -45 $\left[\frac{\circ}{\text{dec}}\right]$ jusqu'à $10 \cdot \omega_n = 10 \cdot \frac{1}{T} = 10 \cdot |s_1|$, et ensuite 0 $\left[\frac{\circ}{\text{dec}}\right]$) (fichier source).

et sont donc conjugués complexes par le fait que les coefficients du dénominateur $a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0$, i.e. de l'équation caractéristique, sont réels.

Le mode temporel leur étant associé est :

$$g(t) = \frac{k}{\omega_0} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

- le *taux d'amortissement* ζ détermine (mais n'est pas égal à ...) le nombre d'oscillations de la réponse temporelle avant stabilisation (voir figure 2.43 page 96) ;
- la *pulsation propre non-amortie* ω_n correspond à la pulsation de résonance de phase, la pulsation à laquelle la phase vaut -90 [°]. C'est aussi à cette pulsation que se coupent les 2 asymptotes de gain (voir figure 2.45 page 98) ;
- ω_0 est la *pulsation propre du régime libre*, observable sur la réponse tempo-

relle en régime transitoire : on a $\omega_0 = \omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$ (voir figure 2.44 page 97) ;
- δ est le *facteur d'amortissement* et indique la rapidité avec laquelle le régime transitoire s'atténue ($\sin(\omega_0 \cdot t)$ est pondéré par $e^{-\delta \cdot t}$) (voir figure 2.44 page 97).
- la *pulsation de résonance* $\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1-2\cdot\zeta^2}$ correspond à la pulsation de résonance de gain, i.e. la pulsation à laquelle le gain est maximal (voir figure 2.45 page 98).

Système fondamental d'ordre 2 : mode oscillatoire

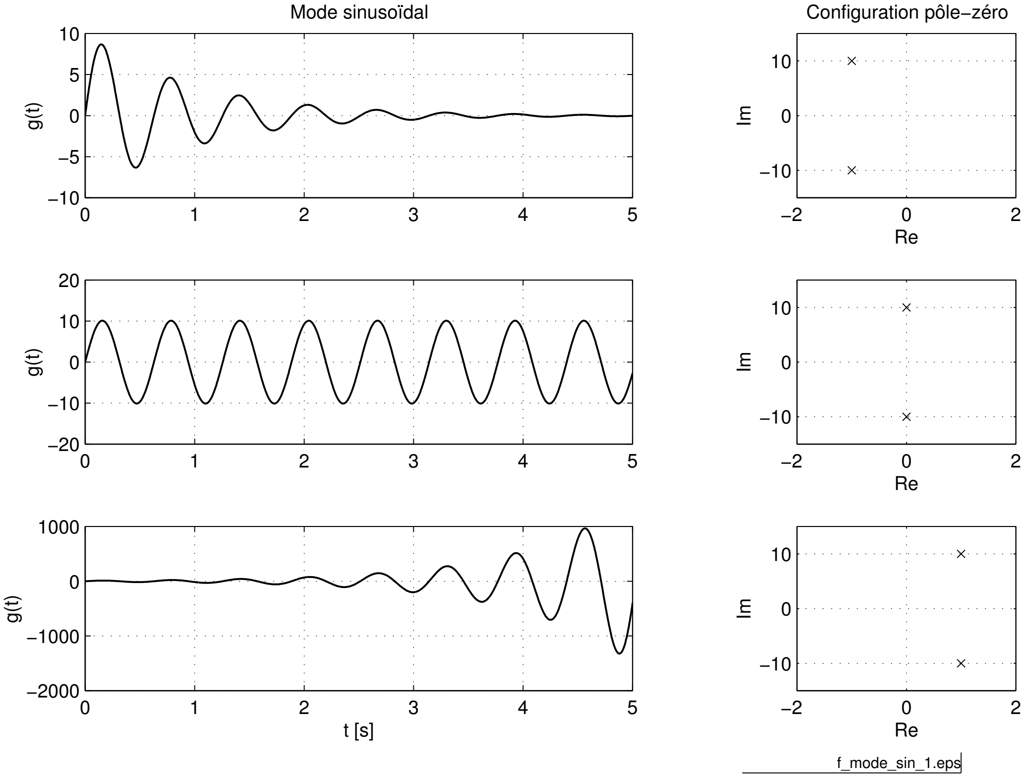


FIG. 2.41 – Influence de la position des pôles d'un système fondamental d'ordre 2 par rapport à l'axe $\Im$. Si les pôles sont situés à gauche de l'axe imaginaire, le mode se stabilise. Il est entretenu s'ils sont sur l'axe imaginaire et divergent lorsque les pôles sont à partie réelle positive (fichier source).

Système fondamental d'ordre 2 : rapidité (pôles complexes)

Voir figure 2.42 page suivante.

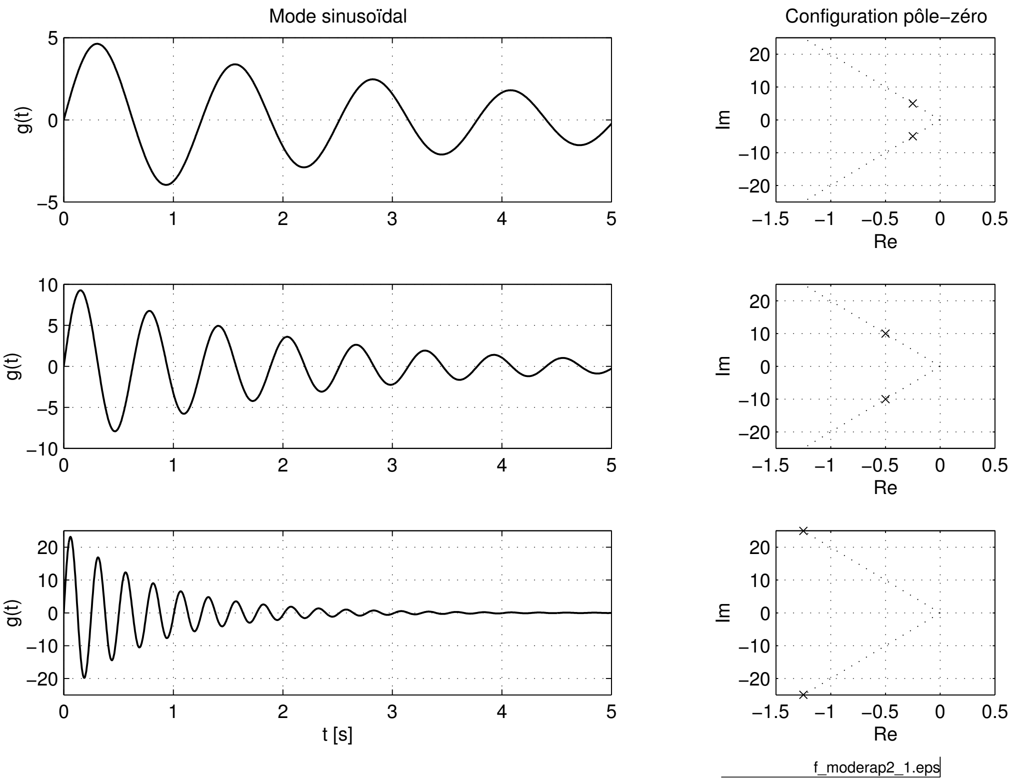


FIG. 2.42 – (fichier source).

Système fondamental d'ordre 2 : réponses temporelles (influence de ζ et ω_n)

Voir figure 2.43 page suivante.

Système fondamental d'ordre 2 : réponses temporelles (influence de δ et ω_0)

Voir figure 2.44 page 97.

Système fondamental d'ordre 2 : réponse harmonique

Voir figure 2.45 page 98.

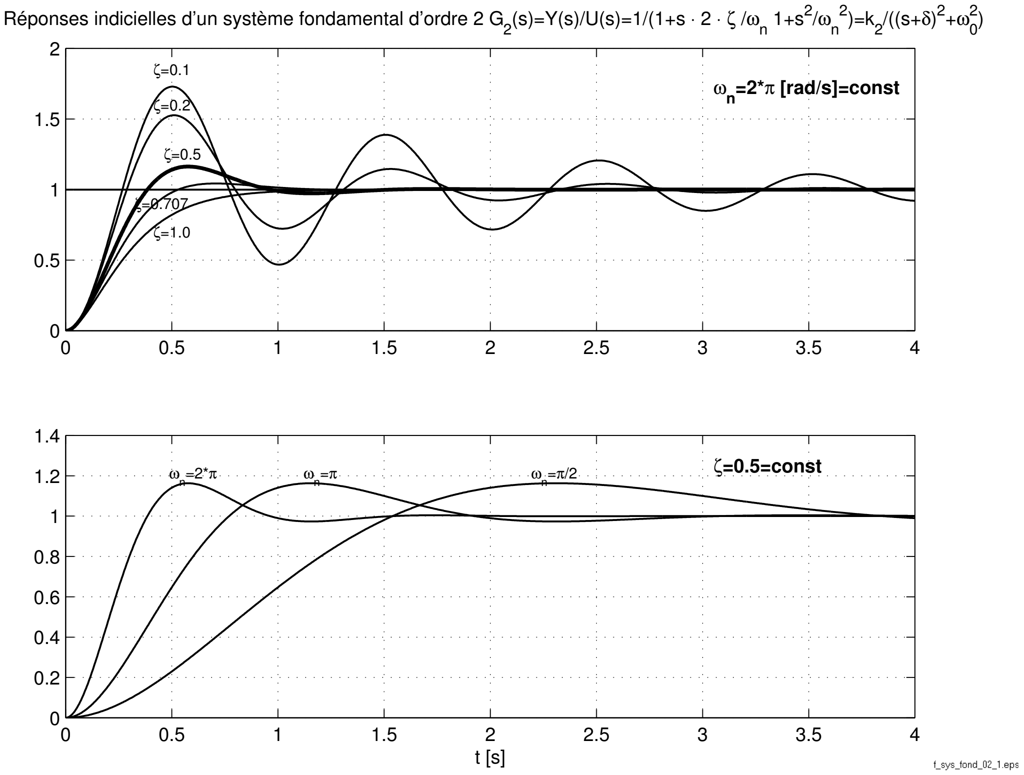


FIG. 2.43 – Le taux d'amortissement ζ fixe (mais n'est pas égal à ...) le nombre d'oscillations avant stabilisation de la réponse temporelle (fichier source).

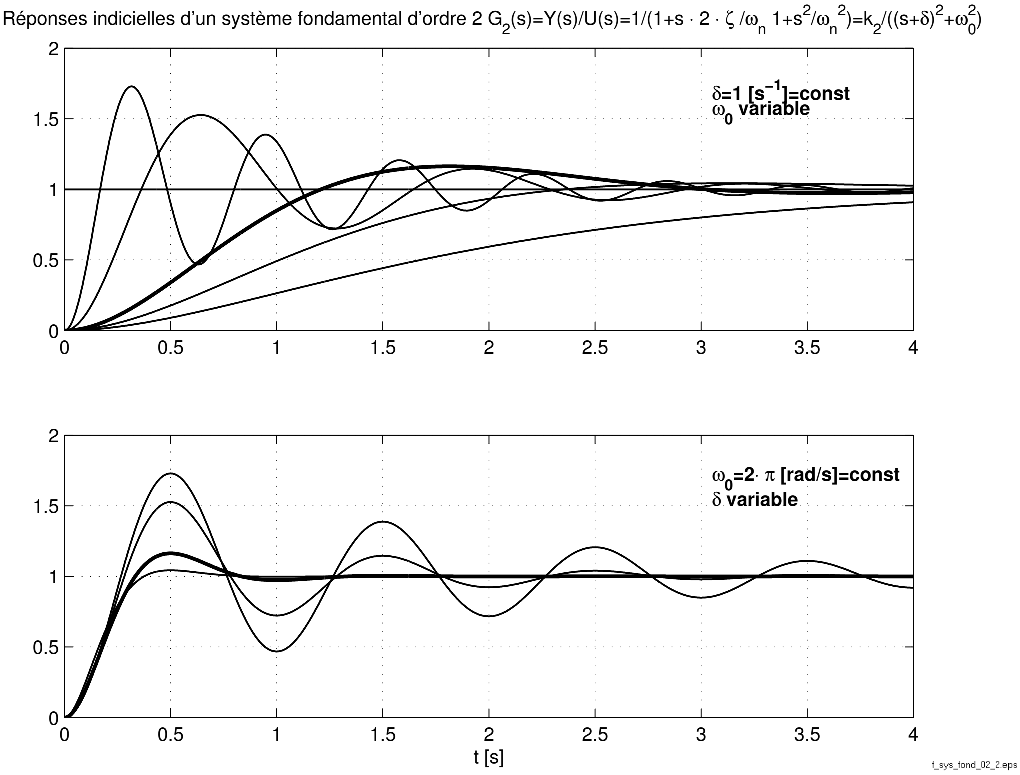


FIG. 2.44 – La pulsation propre du régime libre ω_0 détermine la période d'oscillation de la réponse temporelle : $T_0 = \frac{2\cdot\pi}{\omega_0}$ (fichier source).

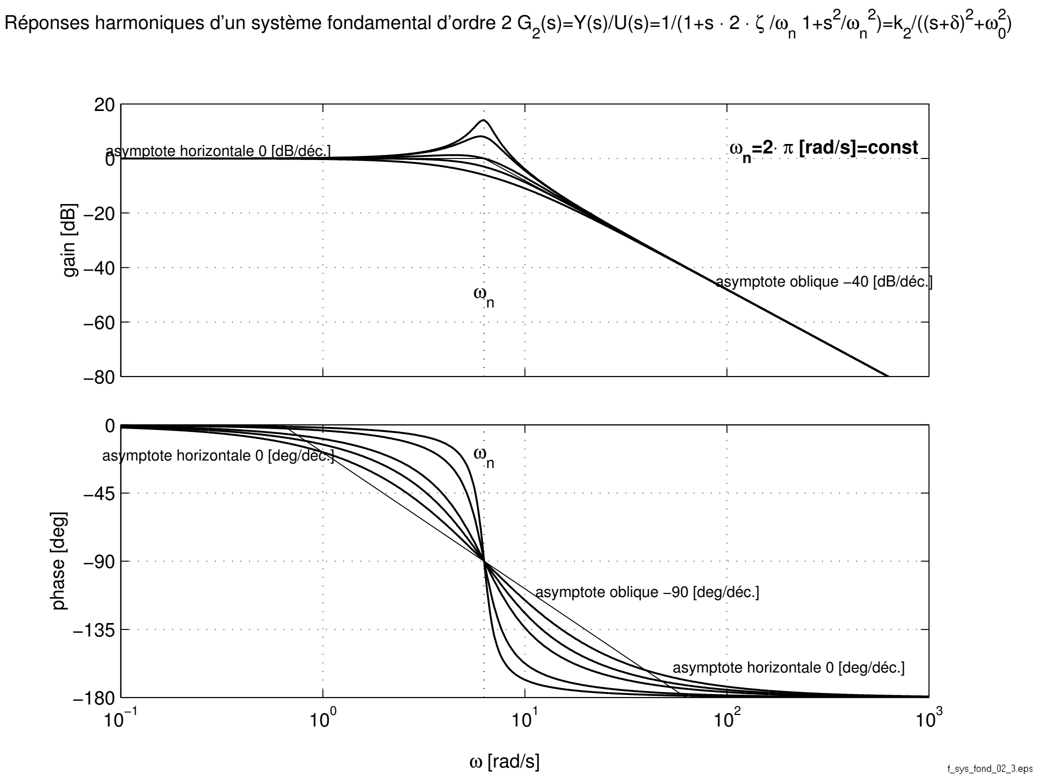


FIG. 2.45 – Réponses harmonique d'un système fondamental d'ordre 2, pour différentes valeurs du taux d'amortissement ζ. La pulsation propre non-amortie ω_n correspondant la résonance de phase, i.e. à la pulsation à laquelle la phase vaut -90 [°] : la fonction de transfert est imaginaire pure (fichier source).

2.7 Représentation d'un système dynamique linéaire par son modèle d'état.

2.7.1 Exemple introductif : circuit RLC série

Modèle entrée-sortie ("Input-ouput model")

On considère le circuit électrique suivant :

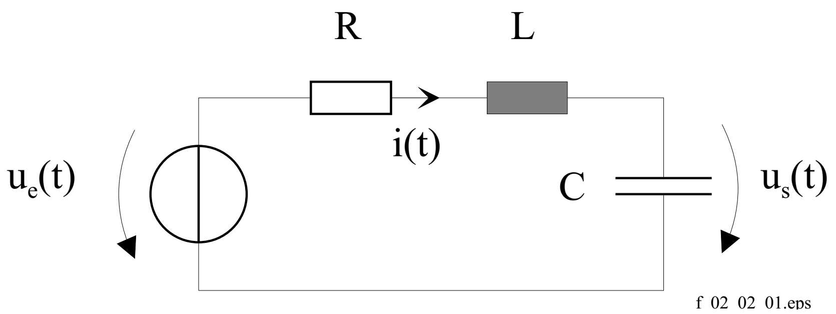


FIG. 2.46 – Circuit RLC série (fichier source).

En admettant que les paramètres R, L et C soient constants, la relation mathématique liant la tension de sortie $u_s(t)$ à celle d'entrée $u_e(t)$ peut être trouvée en écrivant l'équation (intégro-) différentielle régissant le circuit :

$$u_e(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^{t} i(\tau) \cdot d\tau$$

Notant que :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_s}{dt}$$

$q(t)$ étant la charge instantanée du condensateur, et que

$$u_s(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^{t} i(\tau) \cdot d\tau$$

l'**équation différentielle d'ordre 2** devient :

$$u_e(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_s}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_s}{dt^2} + u_s(t)$$

soit encore :

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_s(t) = \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_e(t)$$

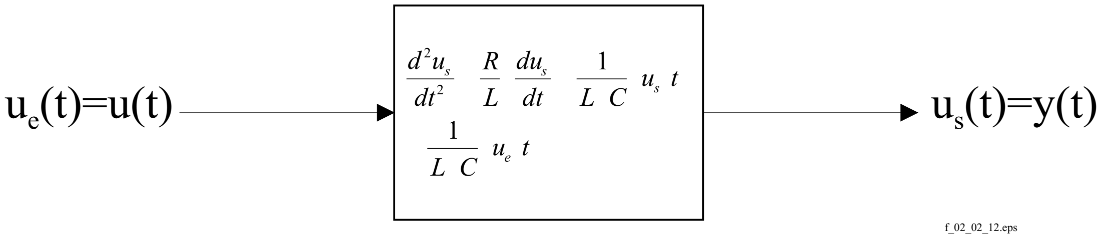


Fig. 2.47 – Description du circuit de la figure 2.46 page précédente par un modèle de connaissance prenant la forme d'une équation différentielle d'ordre 2. Le modèle indique le lien entre l'entrée $u_e(t)$ et la sortie $u_s(t)$: il s'agit d'un modèle *entrée sortie* (fichier source).

Sa résolution fournit la relation cherchée entre

l'**entrée** $u_e(t)$

et

la **sortie** $u_s(t)$

du système.

Dans le cas de conditions initiales nulles, on peut extraire la **fonction de transfert** :

$$G(s) = \frac{U_s(s)}{U_e(s)} = \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C + s^2 \cdot L \cdot C}$$

Il s'agit là à nouveau d'une relation

entrée-sortie

où aucune des grandeurs **internes** du circuit n'intervient, bien que leur connaissance puisse être importante ; on pense notamment

- au courant $i(t)$;
- au flux totalisé $\Psi(t) = L \cdot i(t)$;
- à la charge instantanée du condensateur $q(t)$;
- au champ électrique $E(t)$ entre les armatures du condensateur.

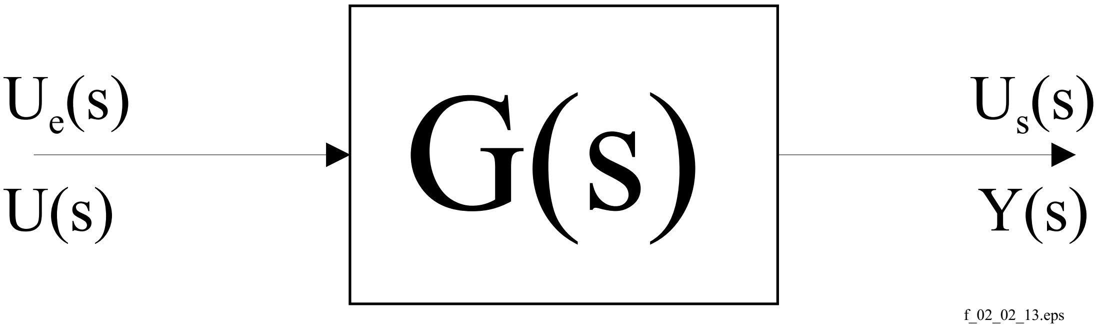


FIG. 2.48 – Description du circuit de la figure 2.46 page 99 par un modèle de connaissance prenant la forme d'une fonction de transfert d'ordre 2. Comme le modèle de la figure 2.47 page ci-contre, il s'agit également d'un modèle *entrée sortie* (fichier source).

Un courant $i(t)$ trop élevé peut provoquer une saturation magnétique se manifestant directement sur le flux totalisé $\Psi(t)$, alors qu'une charge exagérée du condensateur peut engendrer un champ électrique E supérieur au champ disruptif. Dans un cas comme dans l'autre, les hypothèses de linéarité sont démenties, mais aucune de ces grandeurs n'apparaît dans l'un ou l'autre des modèles entrée-sortie (équation différentielle d'ordre 2 et fonction de transfert) obtenus.

Modèle d'état

La représentation dans l'espace d'état (State space model) offre une alternative au modèle entrée-sortie en proposant un modèle liant non seulement les signaux d'entrée et de sortie d'un système dynamique tout en gardant "à l'oeil" certaines grandeurs internes essentielles, les **variables d'état**.

Pour l'obtenir, il suffit de décrire le système dynamique par n **équations différentielles d'ordre 1** en lieu et place d'une seule équation différentielle d'ordre n. Pour le circuit électrique considéré, on pourrait écrire :

$$\begin{cases} u_e(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q(t) \\ i(t) = \frac{dq}{dt} \end{cases}$$

où $q(t)$ est la charge électrique instantanée du condensateur. En plaçant les dérivées premières dans les membres de gauche et en mettant en forme, on a :

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot i(t) - \frac{1}{L \cdot C} \cdot q(t) + \frac{1}{L} \cdot u_e(t) \\ \frac{dq}{dt} = i(t) \end{cases}$$

Ces deux équations, mises ainsi sous forme canonique, modélisent le comportement dynamique du circuit. Elles sont les **équations d'état** du système. L'expression de la tension de sortie $u_s(t)$ est alors simplement

$$u_s(t) = \frac{1}{C} \cdot q(t)$$

qui est appelée **équation d'observation**.

En profitant de la notation matricielle, on peut présenter les trois dernières équations sous forme compacte :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L\cdot C} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_e$$
$$u_s = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ q \end{bmatrix}$$

La résolution de la première de ces équations (i.e. l'équation d'état) fournit $i(t)$ et $q(t)$ en fonction de $u_e(t)$. Le calcul de $u_s(t)$ n'est alors plus qu'une simple formalité (combinaison linéaire des états $i(t)$ et $q(t)$) en faisant usage de la seconde équation, i.e. l'équation d'observation.

Les **variables d'états** du système sont ici

$$i(t) \qquad \text{et} \qquad q(t)$$

Elles ont été réunies dans le **vecteur d'état**

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} i \\ q \end{bmatrix}$$

Non-unicité de la représentation d'état

Remarquons que d'autres grandeurs pourraient faire office d'état. En faisant les substitutions

$$i\,(t) = \frac{1}{L} \cdot \Psi\,(t)$$
$$u_s\,(t) = \frac{1}{C} \cdot q\,(t)$$

et en réécrivant les équations du circuit comme suit

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{R}{L^2} \cdot \Psi\,(t) - \frac{1}{L} \cdot u_s\,(t) + \frac{1}{L} \cdot u_e\,(t)$$
$$C \cdot \frac{du_s}{dt} = \frac{1}{L} \cdot \Psi\,(t)$$

on a finalement, après avoir multiplié la première équation par L et la seconde par $\frac{1}{C}$,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Psi \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -1 \\ \frac{1}{L\cdot C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi \\ u_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_e$$
$$u_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi \\ u_s \end{bmatrix}$$

ce qui montre déjà que la représentation d'état n'est pas unique.

2.7.2 Définition

La représentation d'état d'un système dynamique linéaire est un modèle par lequel non seulement la relation *entrée-sortie* entre $u(t)$ et $y(t)$ est déterminée,

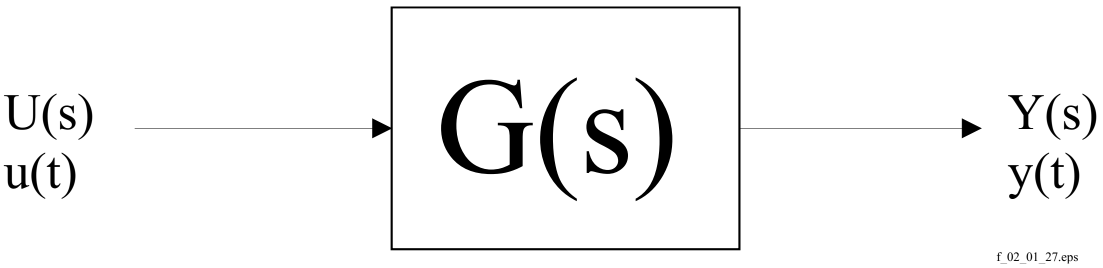


FIG. 2.49 – Modèle entrée-sortie (fichier source).

comme c'est déjà le cas avec

– l'équation différentielle d'ordre n,

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\cdot\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\cdot\frac{dy}{dt}+a_0\cdot y = b_m\cdot\frac{d^m u}{dt^m}+b_{m-1}\cdot\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\cdot\frac{du}{dt}+b_0\cdot u$$

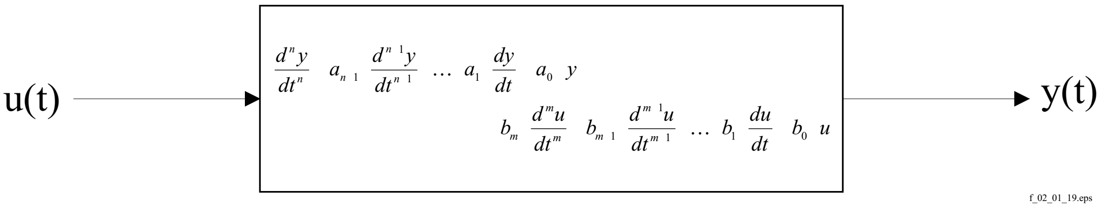


FIG. 2.50 – Représentation d'un système dynamique linéaire par une équation différentielle d'ordre n (fichier source).

– la réponse impulsionnelle $g(t)$ ou la fonction de transfert $G(s)$,

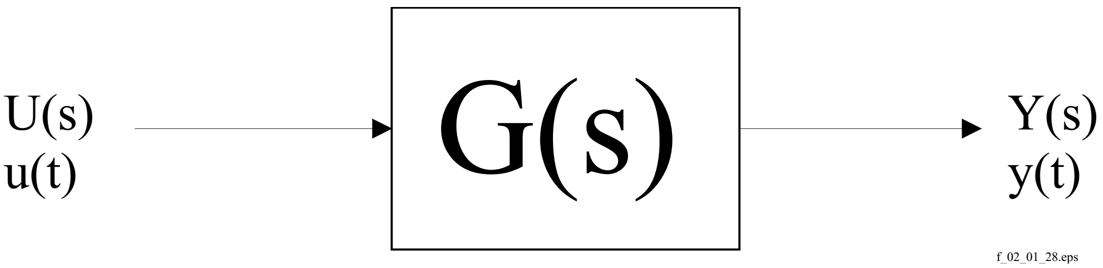


FIG. 2.51 – Représentation d'un système dynamique linéaire par sa fonction de transfert (fichier source).

mais également le comportement des grandeurs internes $x_1 \ldots x_n$ au système, appelées **variables d'état**.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} & = a_{11} \cdot x_1 & + a_{12} \cdot x_2 & + \ldots & + a_{1n} \cdot x_n & + b_1 \cdot u \\ \frac{dx_2}{dt} & = a_{21} \cdot x_1 & + a_{22} \cdot x_2 & + \ldots & + a_{2n} \cdot x_n & + b_2 \cdot u \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{dx_n}{dt} & = a_{n1} \cdot x_1 & + a_{n2} \cdot x_2 & + \ldots & + a_{nn} \cdot x_n & + b_n \cdot u \end{cases}$$

Les variables d'état x_1 à x_n sont au nombre de n, n étant l'ordre du système. Elles apparaissent naturellement lors de la mise en équations d'un système. Si l'on s'astreint à modéliser celui-ci par un ensemble de n équations différentielles du 1^{er} ordre, les grandeurs d'‘état sont alors celles faisant l'objet de la dérivée. Les n équations différentielles d'ordre 1 sont les **équations d'état** du système.

Bien qu'une définition claire des variables d'état soit relativement difficile à trouver dans la littérature, on proposera néanmoins la suivante :

Les variables d'état d'un système dynamique d'ordre n sont les n grandeurs x_1 à x_n qu'il est nécessaire et suffisant de connaître à l'instant t_0 pour calculer la réponse $y(t)$ du système à toute entrée $u(t)$, $t \geq t_0$.

Cela signifie que si $x_1(t)$ à $x_n(t)$ sont connues à un instant t_0, la connaissance des équations du système ainsi que du signal d'entrée $u(t)$ qui lui est appliqué permet de calculer la réponse $y(t)$ pour $t \geq t_0$. Dans ce sens, les variables d'état $x_1(t_0)$ à $x_n(t_0)$ à l'instant t_0 coïncident avec les conditions initiales du système.

La connaissance à un instant donné des variables d'état du système permet donc d'en définir rigoureusement l'état, à l'instar par exemple des registres d'état ("status registers") d'un processeur. Toute autre donnée est alors superflue, hormis bien sûr les valeurs des paramètres (R, L, C, J, R_f, etc).

Le jeu de n équations différentielles ci-dessus doit en principe être complété par une équation définissant la relation entre les grandeurs d'état $x_1(t)$ à $x_n(t)$ et la sortie $y(t)$ du système :

$$y = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n + d \cdot u$$

Il s'agit de l'**équation d'observation**, dans laquelle le signal de sortie $y(t)$ apparaît comme une combinaison linéaire des états x_1 à x_n.

Exemple : moteur DC

On considère un moteur DC à excitation séparée dont tous les paramètres sont supposés constants :

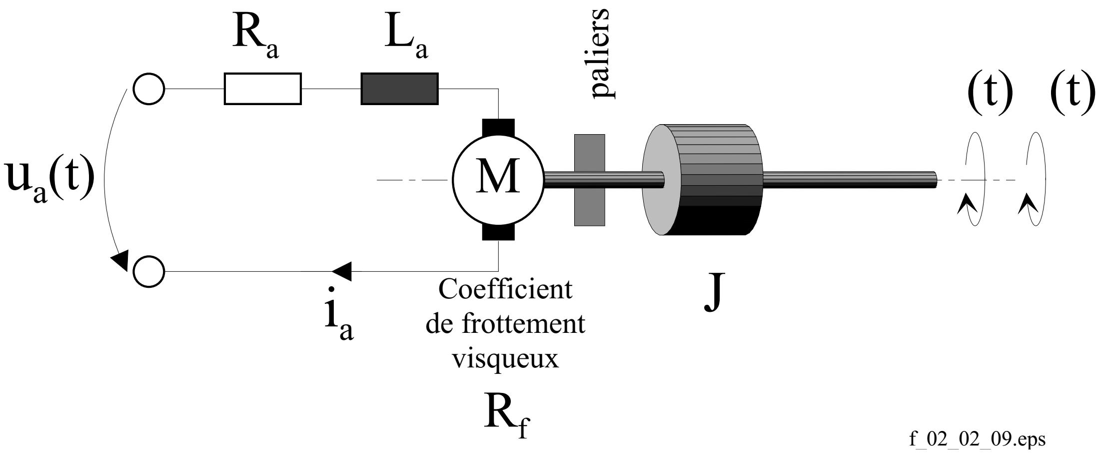


FIG. 2.52 – Schéma technologique d'un moteur DC (fichier source).

Les signaux d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ sont ici la tension $u_a(t)$ appliquée aux bornes de l'induit ainsi que la position angulaire $\theta(t)$ respectivement. La mise en équations donne :

$$\begin{aligned}
&u_a(t) = R_a \cdot i_a(t) + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + K_E \cdot \omega(t) \\
&T_{em}(t) = K_T \cdot i_a(t) \\
&J \cdot \frac{d\omega}{dt} = T_{em}(t) - R_f \cdot \omega(t) \\
&\frac{d\vartheta}{dt} = \omega(t)
\end{aligned}$$

Par simple mise en forme, on peut en déduire les **équations d'état**, en choisissant i_a, ω et θ comme variables d'état :

$$\begin{aligned}
&\frac{di_a}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} \cdot i_a - \frac{K_E}{L_a} \cdot \omega + \frac{1}{L_a} \cdot u_a \\
&\frac{d\omega}{dt} = \frac{K_T}{J} \cdot i_a - \frac{R_f}{J} \cdot \omega \\
&\frac{d\vartheta}{dt} = \omega
\end{aligned}$$

La connaissance de ces trois équations est nécessaire et suffisante pour décrire le comportement dynamique du système considéré, lequel est donc d'ordre $n = 3$.

La sortie y du système est donnée par l'équation d'observation et coïncide dans cet exemple avec l'un des états :

$$y = \theta$$

2.7.3 Forme matricielle

Les équations différentielles d'ordre 1 ci-dessus sont avantageusement représentées en faisant usage de la notation matricielle :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A \cdot \vec{x} + B \cdot u$$
$$y = C \cdot \vec{x} + D \cdot u$$

– le vecteur

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

est le **vecteur d'état** ; c'est un vecteur colonne de dimension $n \times 1$. Ses composantes sont les n états du système.

– la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{an} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

est la **matrice d'état** ou **matrice système** ; c'est une matrice carrée de dimension $n \times n$.

Dans le cas d'un système mono-variable (une entrée u, une sortie y),

– la matrice

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

est la **matrice d'entrée** prenant la forme d'un vecteur-colonne de dimension $n \times 1$;

– la matrice

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix}$$

est la **matrice de sortie**, vecteur-ligne de dimension $1 \times n$;

– la matrice

$$D = [d]$$

est la **matrice de transfert**. Elle se réduit à un scalaire dans le cas mono-variable. Si elle est non-nulle, cela indique que l'entrée u intervient directement sur la sortie y, ce qui traduit un comportement statique (voir figure 2.54 page 109).

L'équation

$$\boxed{\frac{d\vec{x}}{dt} = A \cdot \vec{x} + B \cdot u}$$

est l'**équation d'état**. Elle seule détermine le comportement des états x_1 à x_n, i.e. le comportement dynamique du système.

L'équation

$$\boxed{y = C \cdot \vec{x} + D \cdot u}$$

est l'**équation d'observation** ou encore équation de sortie ; elle n'a aucune influence sur les états. Elle permet de construire la/les sortie(s) du système par simple combinaison linéaire des états.

Exemple : moteur DC

On reprend l'exemple du moteur DC à excitation séparée précédemment traité. Sous forme matricielle, ses équations d'état s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} i_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_E}{L_a} & 0 \\ \frac{K_T}{J} & -\frac{R_f}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \cdot u_a$$

$$\underbrace{\theta}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{[0]}_{D} \cdot \underbrace{u_a}_{u}$$

où le vecteur d'état est

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$

La représentation dans l'espace d'état constitue par ailleurs la forme idéale pour la simulation ; en effet, la plupart des méthodes de résolution de systèmes d'équations de 1^{er} ordre linéaires ou non-linéaires (Runge-Kutta, Euler, etc) requièrent la forme dite *canonique*, où les dérivées premières (des états) apparaissent dans le membre de gauche, le membre de droite comprenant des combinaisons linéaires ou non-linéaires des états.

Par exemple, dans le cas linéaire, les réponses impulsionnelle, indicielle ou harmonique du système étudié sont facilement obtenues avec MATLAB , par les commandes respectives (offertes dans *Control System Toolbox*) :

- step(A,B,C,D)
- impulse(A,B,C,D)
- bode(A,B,C,D)

exécutées après avoir introduit les valeurs numériques des matrices A, B, C et D. On a par exemple pour la réponse indicielle :

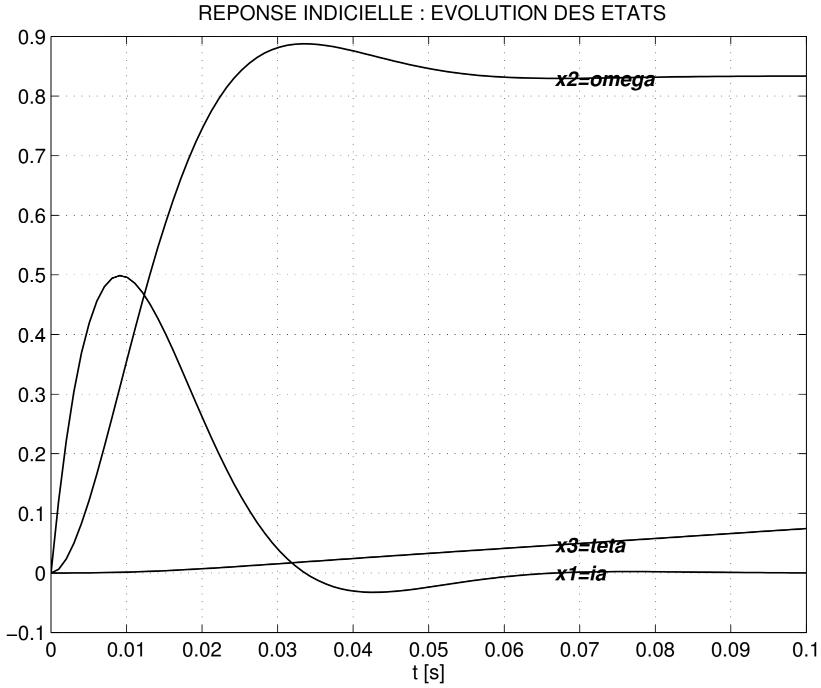


FIG. 2.53 – La réponse indicielle du modèle d'état du moteur DC montre l'évolution des 3 états $i(t)$, $\omega(t)$ et $\theta(t)$.

2.7.4 Schéma fonctionnel

Les équations d'état

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot \vec{x} + B \cdot u$$
$$y = C \cdot \vec{x} + D \cdot u$$

peuvent être représentées graphiquement par le schéma fonctionnel général correspondant (figure 2.54 page ci-contre). Ce schéma met en évidence le rôle capital joué par la matrice d'état A, laquelle détermine les contre-réactions internes au système. Il sera montré ultérieurement qu'elle seule détermine en fait la stabilité du système, ses valeurs propres coïncidant avec les pôles dudit système.

Exemple : moteur DC

Les équations d'état du moteur DC peuvent être représentées sous forme graphique. Un schéma fonctionnel possible celui des figures 2.55 page 110 et 2.56 page 113 où les seuls élément dynamiques intervenant sont des intégrateurs. L'avantage de ces schémas est que l'on peut voir au premier coup d'oeil la structure interne du système, notamment les relations existant entre les différentes grandeurs.

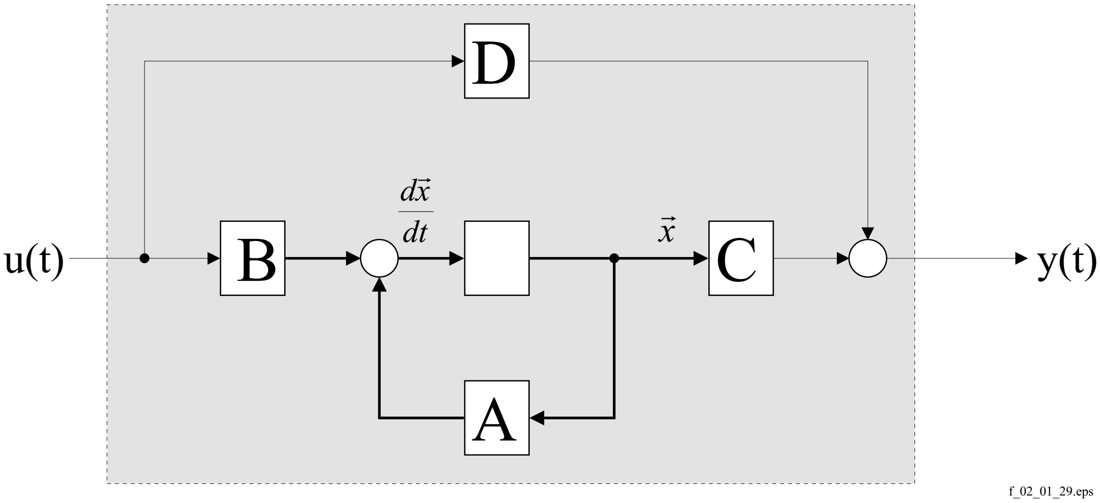


FIG. 2.54 – Schéma fonctionnel (ou structurel) associé à une représentation par un modèle d'état. On observe que la matrice d'état A détermine les contre-réactions des états du système (fichier source).

2.7.5 Calcul de la fonction de transfert à partir du modèle d'état

On se propose ici de calculer la fonction de transfert du système sur la base des équations d'état. Notons que l'opération inverse est également possible.

Dans le cas de conditions initiales nulles, la transformée de Laplace des deux membres des équations d'état donne, pour un système mono-variable :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A \cdot \vec{x} + B \cdot u \\ y &= C \cdot \vec{x} + D \cdot u \end{aligned}$$

Afin d'extraire la relation entrée sortie entre $U(s)$ et $Y(s)$, on élimine $\vec{X}(s)$ entre les deux équations :

$$\begin{aligned} s \cdot \vec{X}(s) - A \cdot \vec{X}(s) &= B \cdot U(s) \\ (s \cdot I - A) \cdot \vec{X}(s) &= B \cdot U(s) \\ \vec{X}(s) &= (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) \end{aligned}$$

En introduisant cette dernière expression dans la seconde équation (l'équation d'observation)

$$Y(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) + D \cdot U(s)$$

on en déduit finalement la fonction de transfert recherchée :

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D}$$

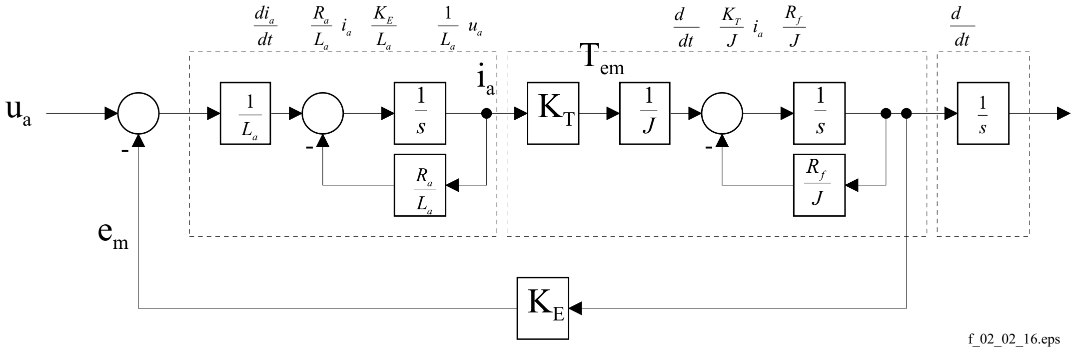


FIG. 2.55 – Une représentation graphique possible des équations d'état du moteur DC (fichier source).

Rappel : inversion d'une matrice *L'inverse d'une matrice A est obtenu en divisant la transposée de la matrice des cofacteurs par le déterminant de A. Cas particulier : matrice 2 sur 2.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

On peut ainsi obtenir la fonction de transfert du système décrit dans l'espace d'état à partir des matrices A, B, C et D. On voit qu'il est nécessaire d'inverser la matrice $(sI - A)$ qui est d'ordre n, ce qui peut constituer un travail considérable.

L'expression de $G(s)$ peut encore être développée en tenant compte de l'expression de l'inverse de $(sI - A)$:

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= C \cdot \frac{[\mathrm{cof}(s \cdot I - A)]^T}{|s \cdot I - A|} \cdot B + D \\ &= \frac{C \cdot [\mathrm{cof}(s \cdot I - A)]^T \cdot B + D \cdot |s \cdot I - A|}{|s \cdot I - A|} = \frac{\text{polynôme en s}}{\text{polynôme en s}} \end{aligned}$$

On observe que le dénominateur de $G(s)$ n'est autre que le déterminant de $(sI - A)$. Les racines du dénominateur étant les pôles $s_1 \ldots s_n$ de $G(s)$, on voit que ceux-ci correspondent aux *valeurs propres* de A, obtenues en résolvant :

$$d_c(s) = |s \cdot I - A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{cases}$$

Exemple : moteur DC

La fonction de transfert $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(\ s)}{U_a(s)}$ est obtenue en procédant par étapes :

$$
\begin{aligned}
(s \cdot I - A) &= s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_E}{L_a} & 0 \\ \frac{K_T}{J} & -\frac{R_f}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} s + \frac{R_a}{L_a} & +\frac{K_E}{L_a} & 0 \\ -\frac{K_T}{J} & s + \frac{R_f}{J} & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix} \\
(s \cdot I - A)^{-1} &= \frac{[\mathrm{cof}(s \cdot I - A)]^T}{|s \cdot I - A|} \\
\mathrm{cof}(s \cdot I - A) &= \begin{bmatrix} s \cdot \left(s + \frac{R_f}{J}\right) & s \cdot \frac{K_T}{J} & \frac{K_T}{J} \\ -\frac{K_T}{L_a} \cdot s & s \cdot \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) & \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) \\ 0 & 0 & \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) \cdot \left(s + \frac{R_f}{J}\right) + \frac{K_T \cdot K_E}{J \cdot L_a} \end{bmatrix} \\
[\mathrm{cof}(s \cdot I - A)]^T &= \begin{bmatrix} s \cdot \left(s + \frac{R_f}{J}\right) & -s \cdot \frac{K_T}{L_a} & 0 \\ \frac{K_T}{J} \cdot s & s \cdot \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) & 0 \\ \frac{K_T}{J} & \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) & \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) \cdot \left(s + \frac{R_f}{J}\right) + \frac{K_T \cdot K_E}{J \cdot L_a} \end{bmatrix} \\
|s \cdot I - A| &= s \cdot \left(\left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) \cdot \left(s + \frac{R_f}{J}\right) + \frac{K_T \cdot K_E}{J \cdot L_a} \right) \\
&= s \cdot \left(s^2 + \left(\frac{R_a \cdot J + R_f \cdot L_a}{L_a \cdot J} \right) \cdot s + \frac{K_T \cdot K_E + R_a \cdot R_f}{L_a \cdot J} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\begin{bmatrix} s \cdot \left(s + \frac{R_f}{J}\right) & -s \cdot \frac{K_T}{L_a} & 0 \\ \frac{K_T}{J} \cdot s & s \cdot \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) & 0 \\ \frac{K_T}{J} & \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) & \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) \cdot \left(s + \frac{R_f}{J}\right) + \frac{K_T \cdot K_E}{J \cdot L_a} \end{bmatrix}}{s \cdot \left(s^2 + \left(\frac{R_a \cdot J + R_f \cdot L_a}{L_a \cdot J} \right) \cdot s + \frac{K_T \cdot K_E + R_a \cdot R_f}{L_a \cdot J} \right)} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} \frac{K_T}{J} & \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) & \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) \cdot \left(s + \frac{R_f}{J}\right) + \frac{K_T \cdot K_E}{J \cdot L_a} \end{bmatrix}}{s \cdot \left(s^2 + \left(\frac{R_a \cdot J + R_f \cdot L_a}{L_a \cdot J} \right) \cdot s + \frac{K_T \cdot K_E + R_a \cdot R_f}{L_a \cdot J} \right)}
\end{aligned}
$$

On voit ici que la connaissance de la matrice C peut permettre d'abréger le calcul de l'inverse de $(sI - A)$, certaines composantes de cette dernière n'étant de toute façon pas prises en compte dans le calcul. La même remarque s'applique également à la matrice B intervenant dans le calcul suivant. Pour gagner du temps lors de l'extraction de $(sI - A)^{-1}$ en évitant le calcul de certaines de ses composantes, on aura donc intérêt à prendre en compte la forme de B et C dès le départ.

$$C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B = \frac{\left[\begin{array}{ccc} \frac{K_T}{J} & \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) & \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) \cdot \left(s + \frac{R_f}{J}\right) + \frac{K_T \cdot K_E}{J \cdot L_a} \end{array} \right]}{s \cdot \left(s^2 + \left(\frac{R_a \cdot J + R_f \cdot L_a}{L_a \cdot J}\right) \cdot s + \frac{K_T \cdot K_E + R_a \cdot R_f}{L_a \cdot J}\right)} \cdot \left[\begin{array}{c} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

$$= \frac{\frac{K_T}{J} \cdot \frac{1}{L_a}}{s \cdot \left(s^2 + \left(\frac{R_a \cdot J + R_f \cdot L_a}{L_a \cdot J}\right) \cdot s + \frac{K_T \cdot K_E + R_a \cdot R_f}{L_a \cdot J}\right)}$$

d'où finalement :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + \underbrace{D}_{0} = \frac{\frac{K_T}{L_a \cdot J}}{s \cdot \left(s^2 + \left(\frac{R_a \cdot J + R_f \cdot L_a}{L_a \cdot J}\right) \cdot s + \frac{K_T \cdot K_E + R_a \cdot R_f}{L_a \cdot J}\right)}$$

Le calcul symbolique ci-dessus est fastidieux et pourrait être aisément réalisé au moyen de logiciels de calcul symbolique comme Mathematica, Maple, Mathcad (qui comprend quelques primitives de calcul de Maple) ou MATLAB et sa boîte à outil Symbolic (à nouveau un extrait de Maple). Ce long calcul peut aussi être évité si l'on se contente d'une solution numérique, laquelle est aisément obtenue avec MATLAB au moyen de ss2tf ("State Space to Transfer Function")

Combiné avec printsys(numG,denG), le résultat est :

```
>> [numG,denG]=ss2tf(A,B,C,D);
>> printsys(numG,denG)
num/den =
-5.457e-012 s + 1.277e+004
------------------------------
s^3 + 162.4 s^2 + 1.533e+004 s
```

Du déterminant de $(sI - A)$ peuvent être extraites les valeurs propres, i.e. les pôles s_1 à s_3 du système. Numériquement, cela peut se faire à l'aide de MATLAB par la fonction eig ("*eigenvalues*"), ce qui donne ici :

```
>> eig(A)
ans =
0
-81.1766 +93.4977i
-81.1766 -93.4977i
```

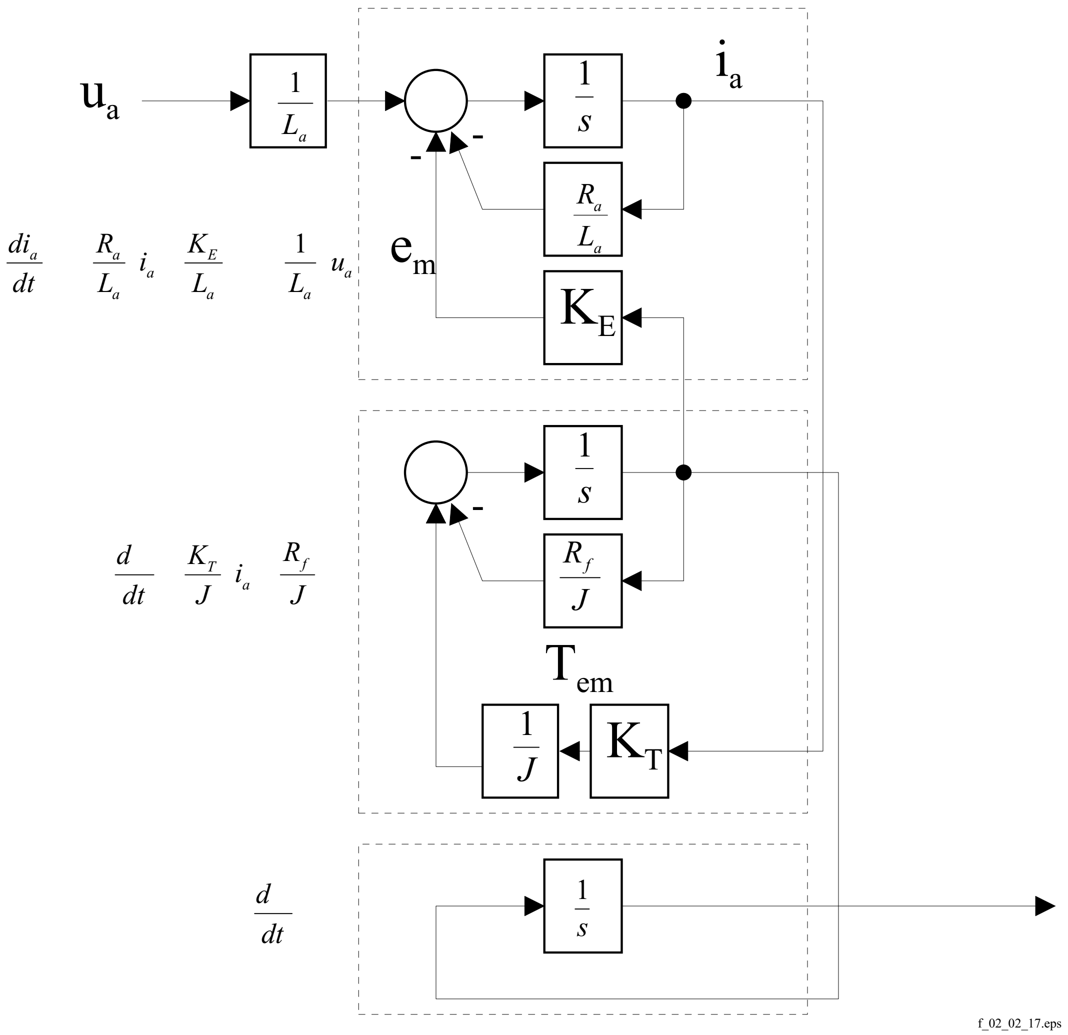


FIG. 2.56 – Une autre représentation graphique des équations d'état du moteur DC (fichier source).

2.7.6 Application : linéarisation autour d'un point de fonctionnement ([[1], chap.11], [[7], §3.6])

Le but de ce paragraphe est de proposer une méthode permettant de linéariser des systèmes non-linéaires en vue de pouvoir leur appliquer les méthodes d'analyse réservées aux systèmes linéaires. Comme on le verra, la représentation du système dans l'espace d'état s'avère être ici particulièrement avantageuse.

On considère l'équation d'état d'un système dynamique mono-variable, causal, stationnaire, linéaire ou non-linéaire, représenté par n équations différentielles d'ordre 1 où la variable indépendante est le temps :

$$\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \ldots x_n) + g_1(u) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, \ldots x_n) + g_2(u) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \ldots x_n) + g_n(u) \\ y = h(x_1, \ldots x_n) + d(u) \end{array}$$

Il faut ici mentionner que souvent, un certain travail de mise en forme est nécessaire afin d'obtenir les équations dans cette présentation, dite canonique. Des logiciels de calcul symbolique comme Mathematicaou Maple peuvent ici être d'une très grande utilité.

Si l'on considère ce système autour d'un point de fonctionnement $Q(u_0, \vec{x}_0)$, on peut écrire pour de petites variations $(u, \vec{x}) = (u_0 + \Delta u, \vec{x}_0 + \Delta\vec{x})$:

$$\begin{aligned} f_i(x_1, \ldots, x_n) &= f_i(x_{10} + \Delta x_1, \ldots, x_{n0} + \Delta x_n) \approx f_i(x_{10}, \ldots, x_{n0}) + \Delta f_i \\ &= f_i(x_{10}, \ldots, x_{n0}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n \end{aligned}$$

De même, on a :

$$g_i(u) = g_i(u_0 + \Delta u) \approx g_i(u_0) + \Delta u_i = g_i(u_0) + \frac{\partial g_i}{\partial u} \cdot \Delta u$$

avec en particulier :

$$\frac{d}{dt}\vec{x}_0 = \vec{0} = \begin{bmatrix} f_1(x_{10}, \ldots, x_{n0}) + g_1(u_0) \\ f_2(x_{10}, \ldots, x_{n0}) + g_2(u_0) \\ \cdots \\ f_n(x_{10}, \ldots, x_{n0}) + g_n(u_0) \end{bmatrix}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\Delta x_1 = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_Q \cdot \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_Q \cdot \Delta x_2 + \ldots + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_Q \cdot \Delta x_n + \left.\frac{\partial g_1}{\partial u}\right|_Q \cdot \Delta u \\ \frac{d}{dt}\Delta x_2 = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_Q \cdot \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_Q \cdot \Delta x_2 + \ldots + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right|_Q \cdot \Delta x_n + \left.\frac{\partial g_2}{\partial u}\right|_Q \cdot \Delta u \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\Delta x_n = \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right|_Q \cdot \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right|_Q \cdot \Delta x_2 + \ldots + \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right|_Q \cdot \Delta x_n + \left.\frac{\partial g_n}{\partial u}\right|_Q \cdot \Delta u \end{array}$$

qui devient en faisant usage de la forme matricielle,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \cdots\\ \Delta x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}_Q \cdot \begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \cdots\\ \Delta x_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial u}\\ \frac{\partial g_2}{\partial u}\\ \cdots\\ \frac{\partial g_n}{\partial u}\end{bmatrix}_Q \cdot \Delta u$$

soit encore :

$$\frac{d\left(\Delta\vec{x}\right)}{dt} = A|_Q \cdot \Delta\vec{x} + B|_Q \cdot \Delta u$$

Pour l'équation d'observation, on a simplement :

$$y = h\left(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}\right) + d\left(u_0 + \Delta u\right)$$

Le système est ainsi linéarisé autour du point de fonctionnement Q et peut donc être traité comme un système linéaire pour de faibles accroissements autour de Q. Le schéma fonctionnel correspondant apparaît ci-après sur la figure 2.57.

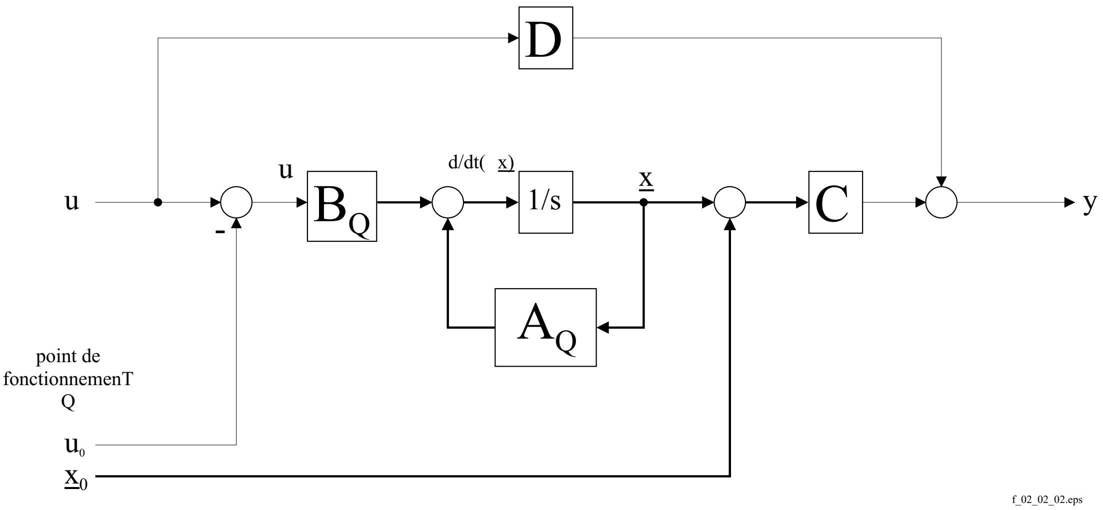


FIG. 2.57 – Schéma fonctionnel pour de faibles accroissements (fichier source).

Exemple

On considère un moteur DC à excitation séparée constante (figure 2.58 page ci-contre), pour lequel l'inertie de la charge J_{ch} est dépendante de la position angulaire θ selon la loi

$$J_{ch} = J_{ch}\left(\vartheta\right) = J_N \cdot \left(\alpha + \sin\left(\vartheta\right)\right)$$

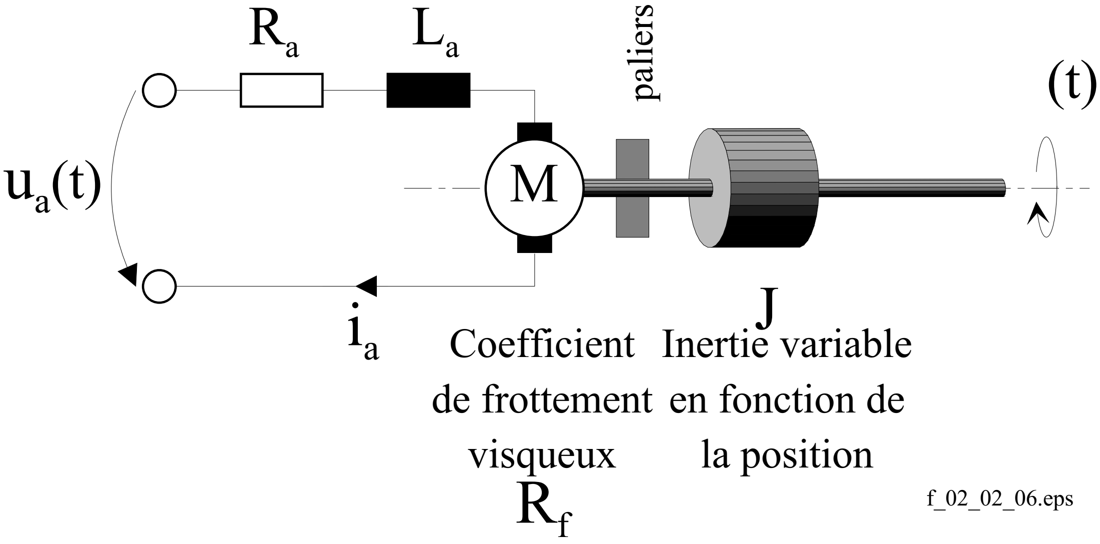


FIG. 2.58 – Schéma technologique d'un moteur DC (fichier source).

Cela représente par exemple un entraînement à came ou le bras d'un robot. Pour cet exemple, le signal de sortie du système est la vitesse angulaire $\omega(t)$.

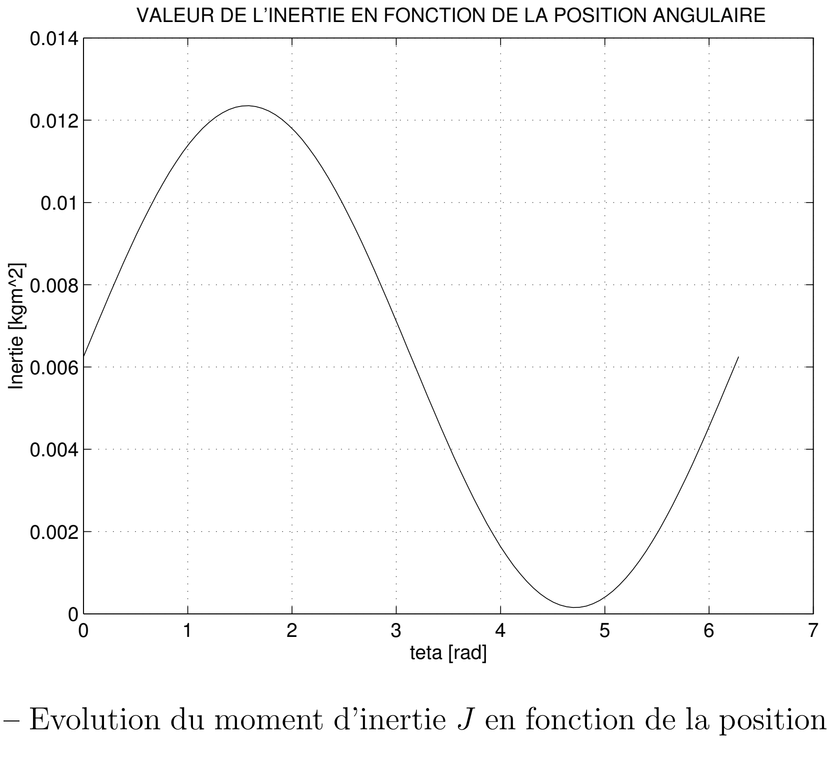


FIG. 2.59 – Evolution du moment d'inertie J en fonction de la position angulaire θ.

Le schéma fonctionnel est donné sur la figure 2.60. On y reconnaît un bloc non-linéaire symbolisé conventionnellement par un rectangle aux bordures doubles.

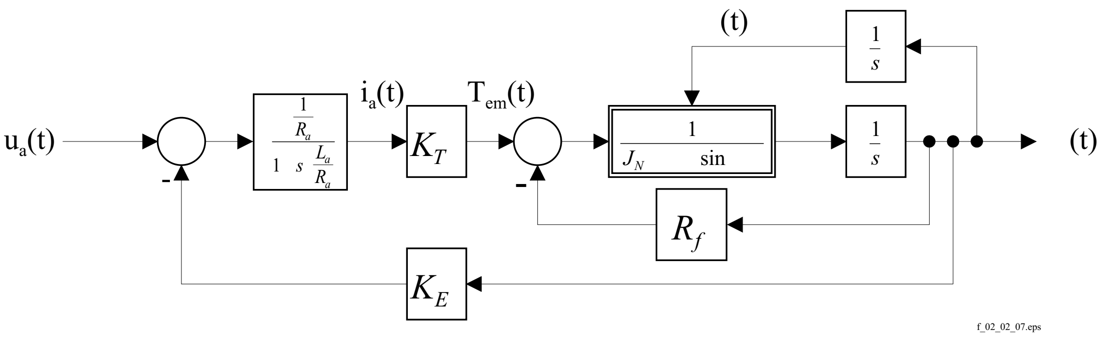


Fig. 2.60 – Schéma fonctionnel d'un moteur DC entraînant une inertie variable en fonction de la position angulaire θ (fichier source).

Les équations d'état sont :

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} = \frac{di_a}{dt} &= -\frac{R_a}{L_a}\cdot i_a - \frac{K_E}{L_a}\cdot\omega + \frac{1}{L_a}\cdot u_a \\
&= f_1(x_1,x_2,x_3) + g_1(u) \\
\frac{dx_2}{dt} = \frac{d\omega}{dt} &= \frac{K_T}{J_t}\cdot i_a - \frac{R_f}{J_t}\cdot\omega = \frac{K_T}{J_N\cdot(\alpha+\sin(\vartheta))}\cdot i_a - \frac{R_f}{J_N\cdot(\alpha+\sin(\vartheta))}\cdot\omega \\
&= f_2(x_1,x_2,x_3) + g_2(u) \\
\frac{dx_3}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega \\
&= f_3(x_1,x_2,x_3) + g_3(u)
\end{aligned}
$$

Ces mêmes équations, linéarisées autour du point de fonctionnement $Q(u_{a0}, [i_{a0}, \omega_0, \theta_0])$, deviennent, après calcul des dérivées partielles :

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \Delta x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}_Q \cdot \begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \Delta x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial u}\\ \frac{\partial g_2}{\partial u}\\ \frac{\partial g_n}{\partial u}\end{bmatrix}_Q \cdot \Delta u
$$

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta i_a\\ \Delta\omega\\ \Delta\vartheta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_E}{L_a} & 0\\ \frac{K_T}{J_N}\cdot\frac{1}{(\alpha+\sin(\vartheta_0))} & -\frac{R_f}{J_N}\cdot\frac{1}{(\alpha+\sin(\vartheta_0))} & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta i_a\\ \Delta\omega\\ \Delta\vartheta\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{L_a}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\cdot\Delta u_a
$$

où en particulier la dérivée partielle de $f_2(i_a, \omega, \theta)$ par rapport à θ au point de fonctionnement $Q(u_0, [i_{a0}, \omega_0, \theta_0])$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{K_T \cdot i_{a0}}{J_N} \cdot \frac{-\cos(\vartheta_0)}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))^2} - \frac{R_f \cdot \omega_0}{J_N} \cdot \frac{-\cos(\vartheta_0)}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))^2}$$

est bel et bien nulle puisque

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= \frac{K_T \cdot i_{a0}}{J_N} \cdot \frac{-\cos(\vartheta_0)}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))^2} - \frac{R_f \cdot \omega_0}{J_N} \cdot \frac{-\cos(\vartheta_0)}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))^2} \\
&= \left(\frac{-\cos(\vartheta_0)}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{K_T}{J_N \cdot (\alpha + \sin(\vartheta_0))} \cdot i_{a0} - \frac{R_f}{J_N \cdot (\alpha + \sin(\vartheta_0))} \cdot \omega_0\right)}_{f_2(x_{10},\ldots,x_{n0}) + g_2(u_0) = 0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

On peut alors en déduire, selon les besoins, les pôles, les constantes de temps ou la fonction de transfert liant l'entrée Δu_a et la sortie de son choix.

Pour obtenir la fonction de transfert $G_a(s) = \frac{(\ \ s)}{U_a(s)}$, on élimine le courant Δi_a des équations ci-dessus en l'extrayant de la première équation :

$$\begin{aligned}
\left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) \cdot \Delta I_a(s) &= -\frac{K_E}{L_a} \cdot \Delta\Omega(s) + \frac{1}{L_a} \cdot \Delta U_a(s) \\
\Delta I_a(s) &= \frac{-\frac{K_E}{L_a}}{\left(s + \frac{R_a}{L_a}\right)} \cdot \Delta\Omega(s) + \frac{\frac{1}{L_a}}{\left(s + \frac{R_a}{L_a}\right)} \cdot \Delta U_a(s)
\end{aligned}$$

En introduisant ce résultat dans la seconde équation, on a successivement :

$$s \cdot \Delta\Omega(s) = \frac{K_T}{J_N} \cdot \frac{1}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))} \cdot \left(\frac{-\frac{K_E}{L_a}}{\left(s + \frac{R_a}{L_a}\right)} \cdot \Delta\Omega(s) + \frac{\frac{1}{L_a}}{\left(s + \frac{R_a}{L_a}\right)} \cdot \Delta U_a(s)\right) - \frac{R_f}{J_N} \cdot \frac{1}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))} \cdot \Delta\Omega(s)$$

$$\left(s + \frac{1}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))} \cdot \left(\frac{R_f}{J_N} + \frac{K_T}{J_N} \cdot \frac{\frac{K_E}{L_a}}{\left(s + \frac{R_a}{L_a}\right)}\right)\right) \cdot \Delta\Omega(s) = \frac{K_T}{J_N} \cdot \frac{1}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))} \cdot \frac{\frac{1}{L_a}}{\left(s + \frac{R_a}{L_a}\right)} \cdot \Delta U_a(s)$$

$$\left(s \cdot \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) + \frac{1}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))} \cdot \left(\frac{R_f}{J_N} \cdot \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) + \frac{K_T}{J_N} \cdot \frac{K_E}{L_a}\right)\right) \cdot \Delta\Omega(s) = \frac{K_T}{J_N} \cdot \frac{1}{L_a} \cdot \frac{1}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))} \cdot \Delta U_a(s)$$

$$\left(s^2 + s \cdot \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{1}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))} \cdot \frac{R_f}{J_N} \cdot\right) + \frac{1}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))} \cdot \left(\frac{R_f}{J_N} \cdot \frac{R_a}{L_a} + \frac{K_T}{J_N} \cdot \frac{K_E}{L_a}\right)\right) \cdot \Delta\Omega(s) = \frac{K_T}{J_N} \cdot \frac{1}{L_a} \cdot \frac{1}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))} \cdot \Delta U_a(s)$$

La fonction de transfert en régime d'accroissements est finalement, présentée sous forme d'Evans (Laplace) puis sous forme de Bode :

$$\begin{aligned}
G_a(s) &= \frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U_a(s)} \\
&= \frac{k_a}{(s^2 + a_1 \cdot s + a_0)} \\
&= \frac{\frac{K_T}{L_a \cdot J_N} \cdot \frac{1}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))}}{\left(s^2 + s \cdot \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{1}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))} \cdot \frac{R_f}{J_N}\right) + \frac{1}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))} \cdot \left(\frac{R_f \cdot R_a + K_T \cdot K_E}{L_a \cdot J_N}\right)\right)} \\
&= \frac{K_T}{R_f \cdot R_a + K_T \cdot K_E} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{1}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))} \cdot \frac{R_f}{J_N}\right)}{\frac{1}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))} \cdot \left(\frac{R_f \cdot R_a + K_T \cdot K_E}{L_a \cdot J_N}\right)} \cdot s + \frac{1}{\frac{1}{(\alpha + \sin(\vartheta_0))} \cdot \left(\frac{R_f \cdot R_a + K_T \cdot K_E}{L_a \cdot J_N}\right)} \cdot s^2\right)}
\end{aligned}$$

Le système à régler étudié a donc des caractéristiques dynamiques dépendant du point de fonctionnement $Q(u_0, [i_{a0}, \omega_0, \theta_0])$. Afin d'en juger les effets, on trace ci-dessous la réponse indicielle de $G_a(s)$ en différents points de fonctionnement fixés par la valeur de la position angulaire θ :

$$Q(u_0, [i_{a0}, \omega_0, \theta_0] = Q\left(1\,[\mathrm{V}], \left[0\,[\mathrm{A}], 0\,\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right], \theta_0 = 0\ldots 330\ [^\circ]\right]\right)$$

On constate très clairement l'influence de la valeur de la position angulaire sur

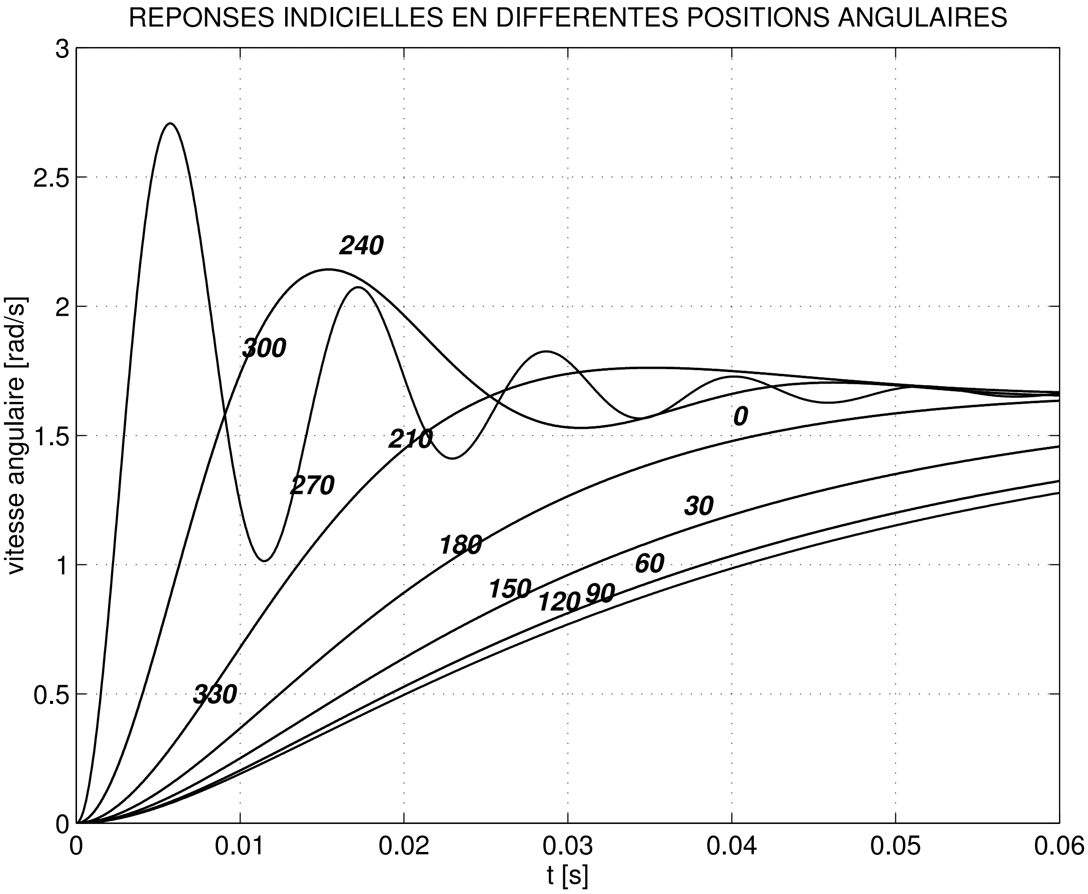


FIG. 2.61 – Réponses indicielles du système à régler en fonction de la position angulaire.

le comportement dynamique du système. Il va donc de soi qu'il faut prendre en compte cet effet si le système est destiné être contre-réactionné en vue d'un asservissement de position, de vitesse ou encore de courant.

Chapitre 3

Schémas fonctionnels

3.1 Introduction

Un système dynamique linéaire peut être représenté par sa fonction de transfert $G(s)$. Graphiquement, on peut donc symboliser le système entier par un bloc dans lequel on note $G(s)$ (figure 3.1).

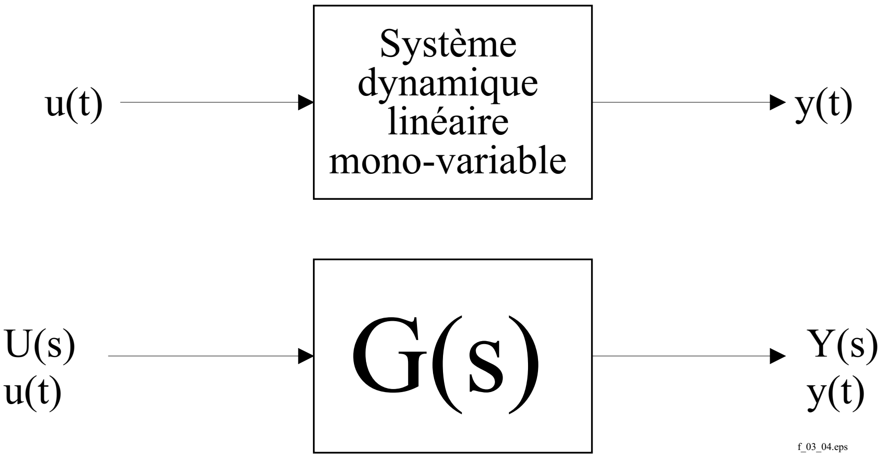


FIG. 3.1 – Représentation symbolique/graphique d'un système dynamique linéaire, en indiquant sa fonction de transfert (fichier source).

Si l'on analyse le schéma fonctionnel d'un système dynamique linéaire complexe (figure 3.2 page suivante), composé de multiples sous-systèmes interconnectés, représentés chacun par leur fonction de transfert $G_1(s), G_2(s), \ldots, G_k(s)$, l'obtention de la fonction de transfert $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ du système global est nécessaire pour en déterminer le comportement dynamique. Dans cette perspective, il faut disposer de règles de combinaison et réduction des schémas fonctionnels, i.e. une *algèbre des schémas*. C'est le thème du présent chapitre.

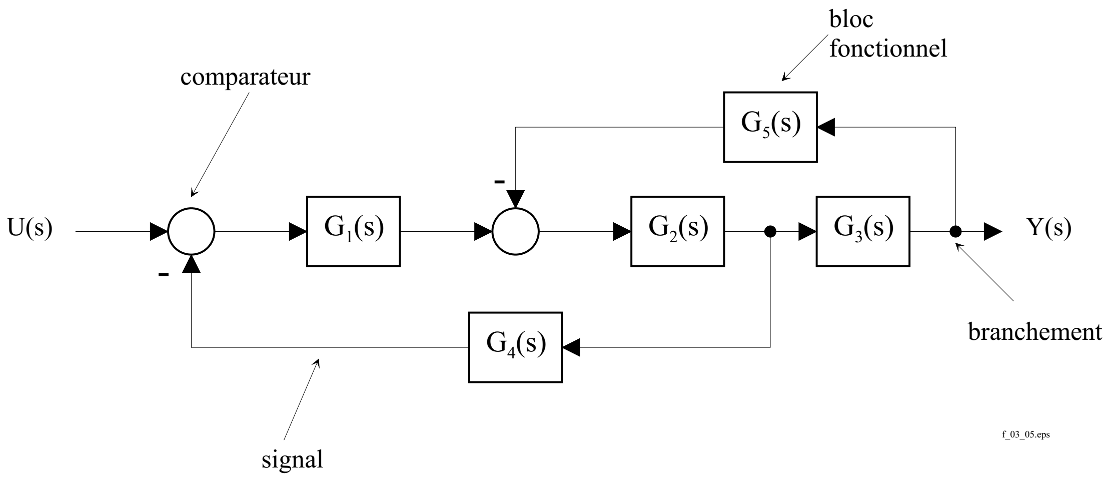


FIG. 3.2 – Système composé de multiples sous-systèmes interconnectés. On cherche à obtenir la fonction de transfert $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$. Pour y parvenir de manière graphique plutôt que mathématique, des règles de réduction de tels schémas sont nécessaires (fichier source).

3.2 Systèmes en cascade

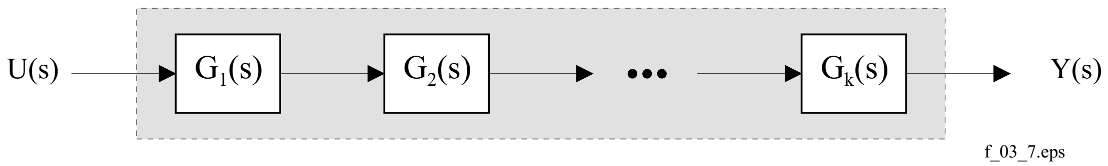


FIG. 3.3 – Mise en série (cascade) de fonctions de transfert (fichier source).

Lorsque plusieurs systèmes sont mis en cascade (figure 3.3), on montre aisément que la fonction de transfert équivalente est donnée par le produit de fonctions de transfert individuelles :

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot \ldots \cdot G_k(s)}$$

Simulation avec MATLAB On souhaite par exemple calculer numériquement la fonction de transfert $G(s)$ correspondant à la mise en cascade de

$$G_1(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 2 \cdot \frac{s+20}{s}$$

et

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = 0.01 \cdot \frac{s+10}{s^2 + 2 \cdot s + 0.11}$$

Les numérateurs et dénominateurs sont tout d'abord introduits :

```
numG1=2*[1,20];
denG1=[1,0];
numG2=1e-3*[1,10];
denG2=[1,2,0.11];
```

Il suffit ensuite d'effectuer la mise en série à l'aide la fonction `series` :

```
[numG, denG] = series(numG1, denG1, numG2, denG2);
```

Simulation avec SysQuake ou MATLAB Notons qu'à partir des version 2.0 et 5.0 de SysQuake, resp. MATLAB , il existe des *objets* fonction de transfert, que l'on peut introduire comme suit (cas de l'exemple ci-dessus) :

```
numG1=2*[1,20];
denG1=[1,0];
G1=tf(numG1, denG1)
numG2=1e-2*[1,10];
denG2=[1,2,0.11];
G2=tf(numG2, denG2)
```

On peut alors calculer sans autre :

```
G=G1*G2;
```

3.3 Systèmes en parallèle

Des sous-systèmes mis en parallèle (figure 3.4 page suivante) ont une fonction de tranfert équivalente égale à la somme des fonctions de transfert de chacun des sous-systèmes :

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s)}$$

Simulation avec MATLAB La mise en parallèle de fonctions de transfert données par leurs numérateurs et dénominateurs se fait comme suit :

```
numG1 = [1];
denG1 = [1,1];
numG2 = 10*[0.1,1];
denG2 = [1,0];
```

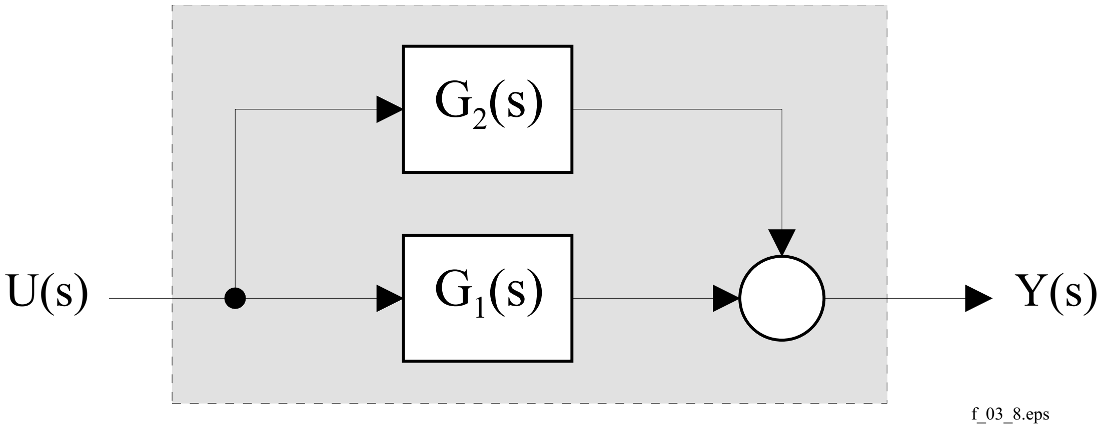


FIG. 3.4 – Mise en parallèle de fonctions de transfert (fichier source).

```
[numG, denG]   = parallel(numG1, denG1, numG2, denG2);
```

Simulation avec SysQuake ou MATLAB Si les fonctions de transferts $G_1(s)$ et $G_2(s)$ sont disponibles sous forme d'objets, on écrit simplement :

```
numG1 = [1];
denG1 = [1,1];
G1 = tf(numG1, denG1);
numG2 = 10*[0.1,1];
denG2 = [1,0];
G2 = tf(numG2, denG2);
G = parallel(G1, G2);
```

ou encore

```
G = G1 + G2;
```

3.4 Systèmes en contre-réaction/réaction

Deux systèmes mis en contre-réaction (signe -) ou en réation (signe +), comme l'indique la figure 3.5, ont la fonction de transfert équivalente :

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_o(s)} = \frac{\text{fonction de transfert de la chaîne d'action}}{1 \pm \text{fonction de transfert de la boucle}}}$$

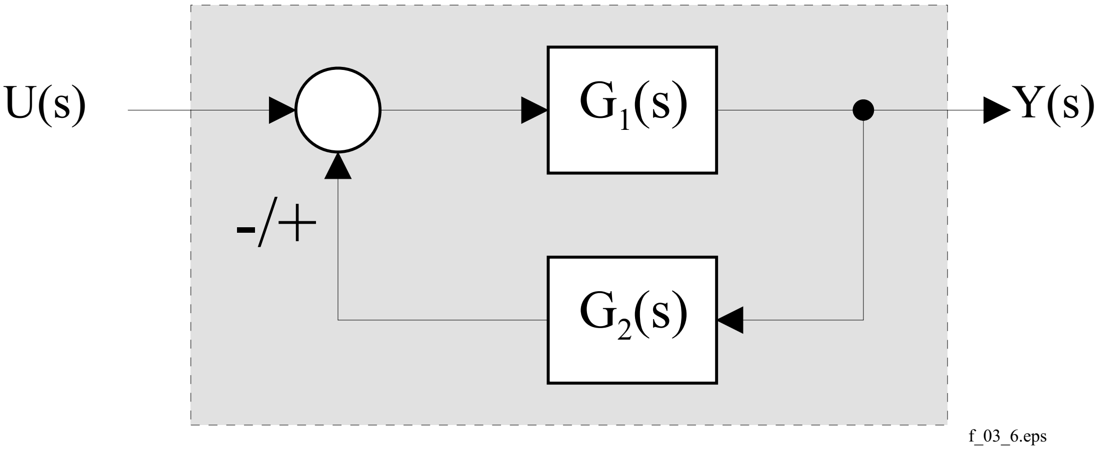


Fig. 3.5 – Mise en contre-réaction/réaction de fonctions de transfert (fichier source).

Cette relation peut être facilement obtenue :

$$Y(s) = G_1(s) \cdot (U(s) \mp G_2(s) \cdot Y(s))$$

$$Y(s) \cdot \left(1 \pm \underbrace{G_1(s) \cdot G_2(s)}_{G_o(s)}\right) = G_1(s) \cdot U(s)$$

d'où

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_o(s)}$$

Simulation avec MATLAB Soient les fonctions de transfert

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 2 \cdot \frac{s+20}{s}$$

$$G_{a1}(s) = \frac{U_1(s)}{U(s)} = 0.01 \cdot \frac{s+10}{s^2 + 2 \cdot s + 0.11}$$

$$G_{a2}(s) = \frac{Y(s)}{U_1(s)} = 36 \cdot \frac{s+0.1}{s^2 + 20 \cdot s + 10}$$

correspondant au schéma fonctionnel de la figure 3.6 page suivante Leur introduction dans MATLAB s'effectue comme suit :

```
numGc=2*[1,20];
denGc=[1,0];
numGa1=1e-3*[1,10];
denGa1=[1,2,0.11];
numGa2=36*[1,0.1];
denGa2=[1,20,10];
```

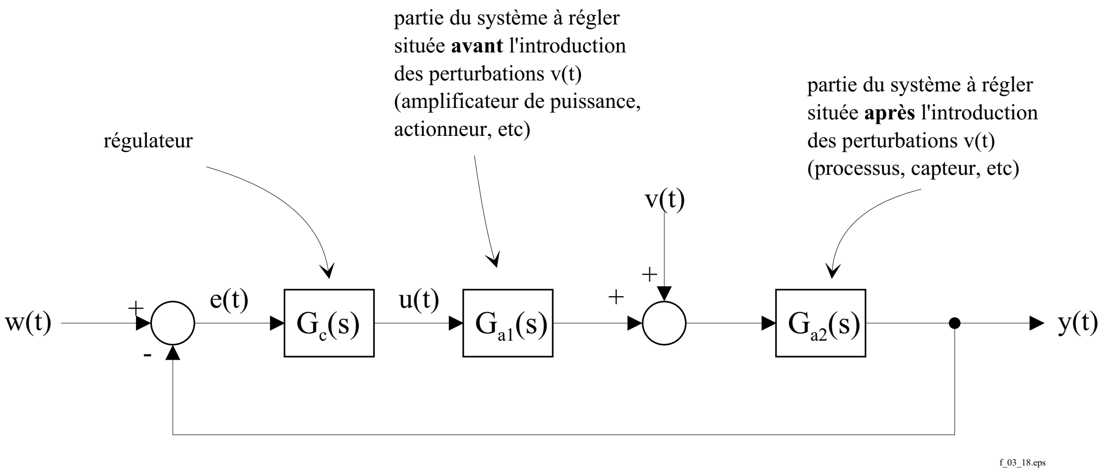


FIG. 3.6 – Schéma fonctionnel *canonique* d'un système asservi (fichier source).

On écrit alors :

```
[numGa, denGa] = series(numGa1, denGa1, numGa2, denGa2);
[numGo, denGo] = series(numGc, denGc, numGa, denGa);
[numGw, denGw] = cloop(numGo, denGo);
[numG, denG] = series(numGc, denGc, numGa1, denGa1);
[numGv, denGv] = feedback(numGa2, denGa2, numG, denG);
```

Simulation avec SysQuake ou MATLAB Si l'on travaille avec les objets fonction de transfert, on a :

```
numGc=2*[1,20];
denGc=[1,0];
Gc=tf(numGc, denGc)
numGa1=1e-3*[1,10];
denGa1=[1,2,0.11];
Ga1=tf(numGa1, denGa1);
numGa2=36*[1,0.1];
denGa2=[1,20,10];
Ga2=tf(numGa2, denGa2);
```

On peut alors calculer sans autre :

```
Go=Gc*Ga1*Ga2;
Gw=feedback(Go,1);
Gv=feedback(Ga2, Gc*Ga1);
```

ou

```
Go=Gc*Ga1*Ga2;
Gw=Go/(1+Go);
Gv=Ga2/(1+Gc*Ga1*Ga2);
```

3.5 Exemple

La figure 3.7 illustre les étapes successives nécessaires à la réduction du schéma fonctionnel présenté en introduction de ce chapitre (figure 3.2 page 122). Il est

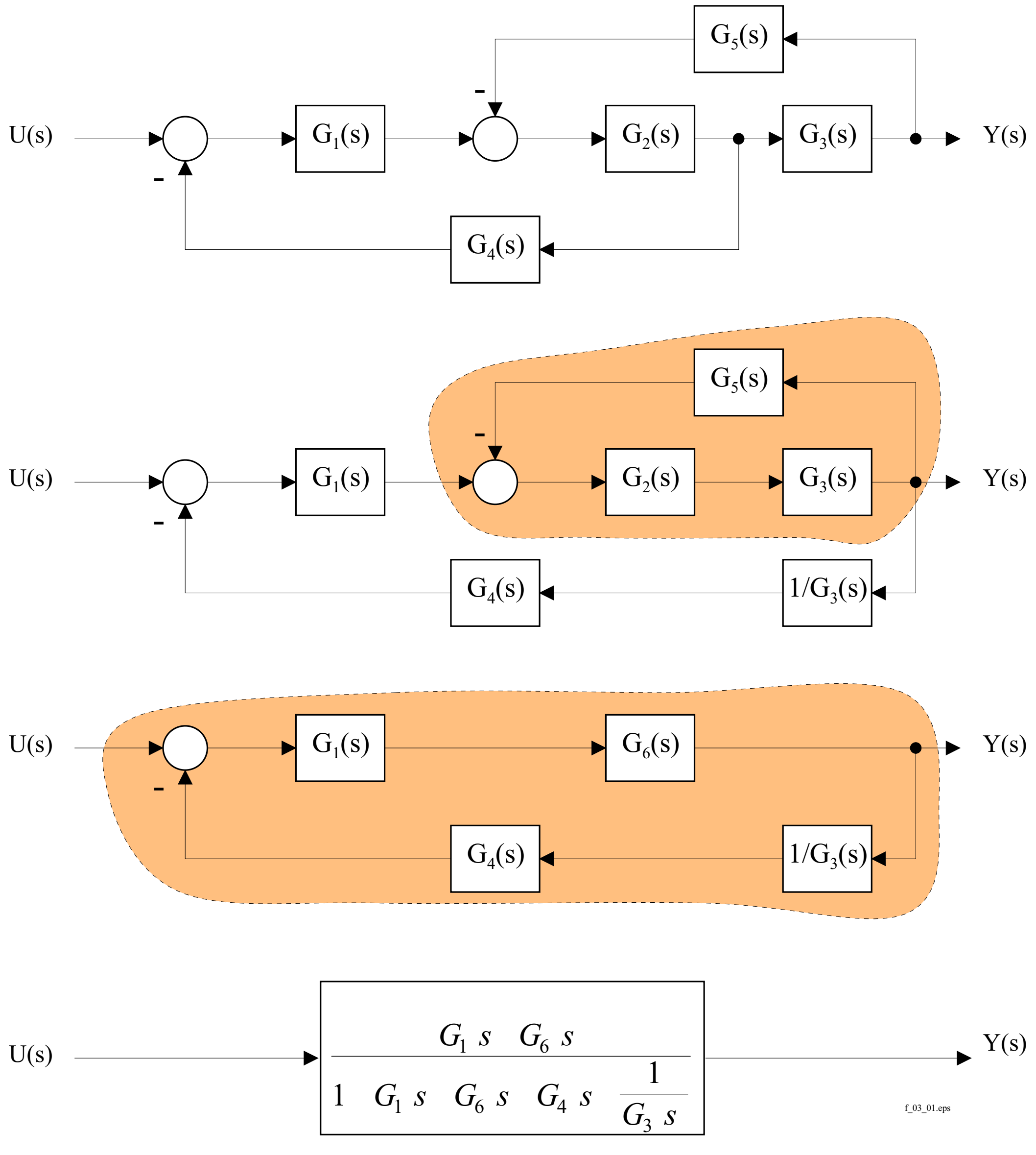


FIG. 3.7 – Exemple de réduction de schéma fonctionnel (fichier source).

dans certains cas utile de présenter un schéma fonctionnel à contre-réaction de telle sorte que le gain de celle-ci soit unitaire. Cette manipulation de schéma est illustrée sur la figure 3.8 page ci-contre.

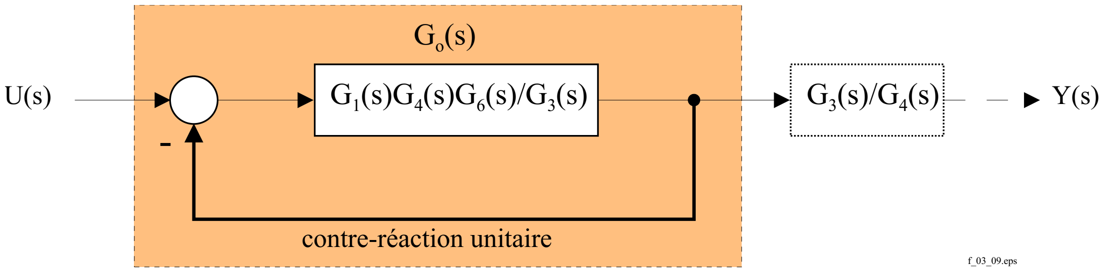


Fig. 3.8 – Si nécessaire, le schéma peut encore être présenté sous forme *canonique*, i.e. tel que la contre-réaction soit **unitaire** (fichier source).

3.6 Exemple : moteur DC

3.6.1 Schéma technologique, mise en équations, modèles en t et en s

En se référant au § 2.3.4 page 77, les modèles en t et en s du système dynamique linéaire de la figure 3.9 sont :

Modèle en t	Modèle en s
$u_a(t) = R_a \cdot i_a(t) + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + e_m(t)$	$U_a(s) = R_a \cdot I_a(s) + L_a \cdot s \cdot I_a(s) + E_m(s)$
$e_m(t) = K_E \cdot \omega(t)$	$E_m(s) = K_E \cdot \Omega(s)$
$T_{em}(t) = K_T \cdot i_a(t)$	$T_{em}(s) = K_T \cdot I_a(s)$
$J_t \cdot \frac{d\omega}{dt} = T_{em}(t) - R_f \cdot \omega(t)$	$J_t \cdot s \cdot \Omega(s) = T_{em}(s) - R_f \cdot \Omega(s)$
$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t)$	$s \cdot \Theta(s) = \Omega(s)$

3.6.2 Schéma fonctionnel détaillé

Le schéma fonctionnel correspondant aux équations est donné sur la figure 3.10.

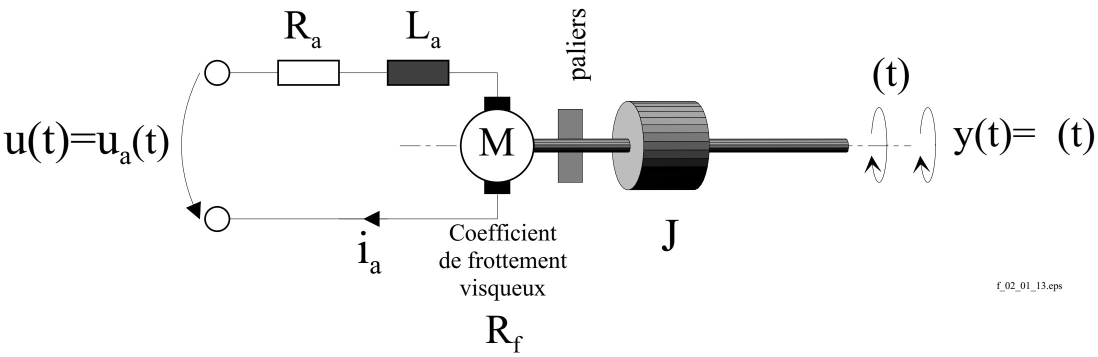


FIG. 3.9 – Schéma technologique d'un moteur DC à excitation séparée constante. Le signal d'entrée est la tension $u_a(t)$ aux bornes de l'induit alors que le signal de sortie est la position angulaire $\theta(t)$ de l'arbre moteur (fichier source).

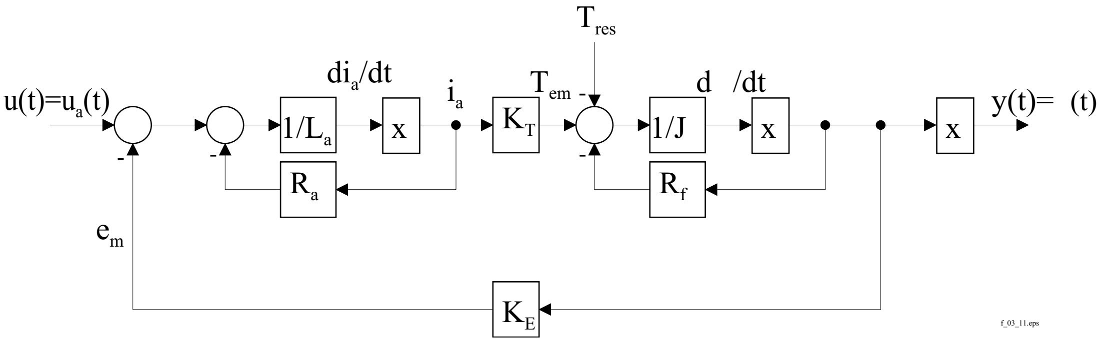


FIG. 3.10 – Schéma fonctionnel détaillé d'un moteur DC à excitation séparée constante (fichier source).

3.6.3 Réduction du schéma fonctionnel détaillé

On peut procéder à la simplification du schéma, en mettant à profit les règles d'algèbre des schémas vues précédemment.

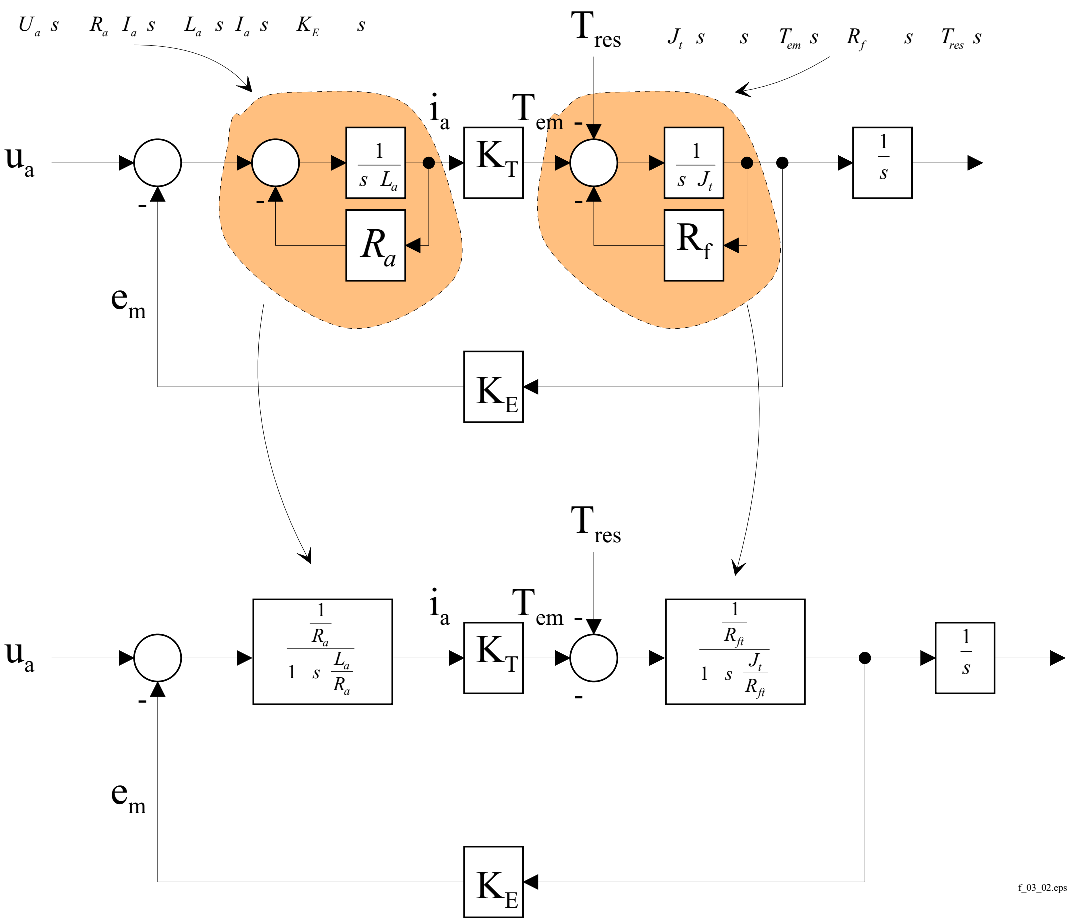


FIG. 3.11 – Schéma fonctionnel détaillé d'un moteur DC à excitation séparée constante : première simplification (fichier source).

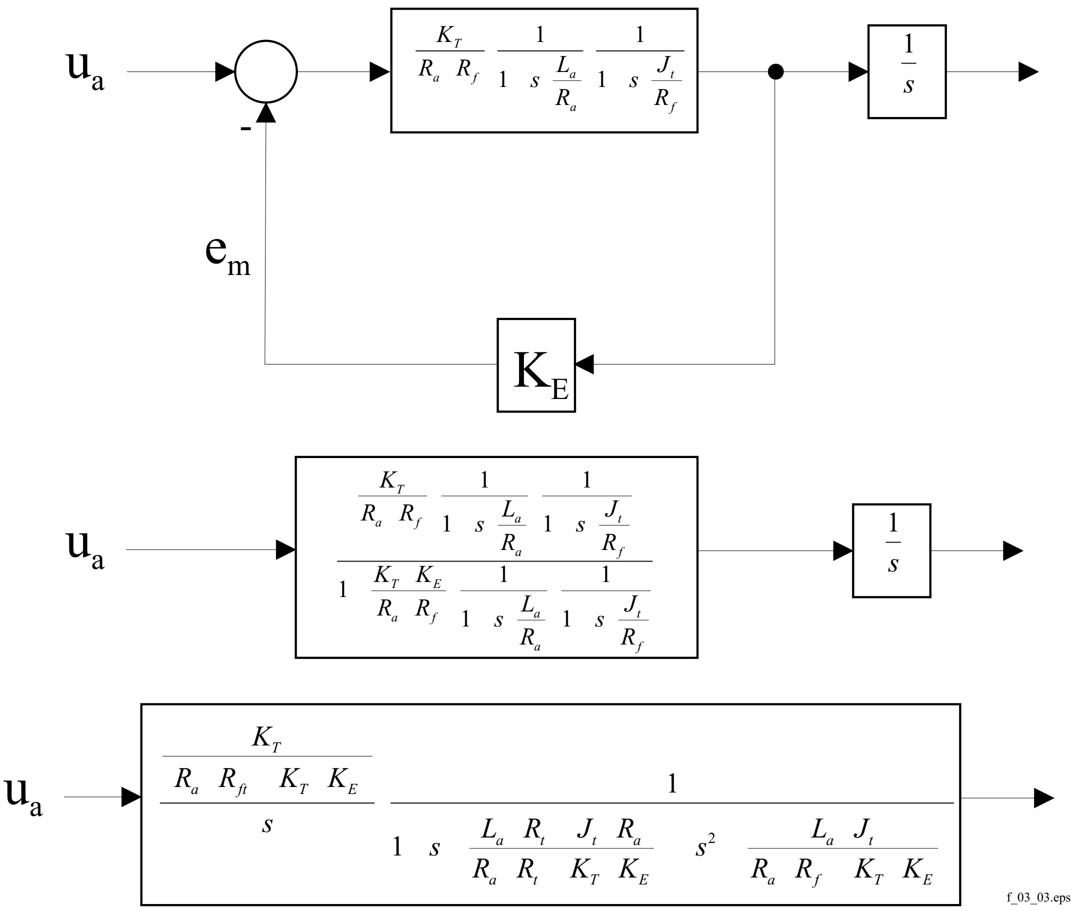


FIG. 3.12 – Réduction du schéma fonctionnel détaillé. On a posé $T_{res} = 0\,[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]$ (fichier source).

Chapitre 4

Régulateur PID

4.1 Fonctions de transfert d'un système asservi

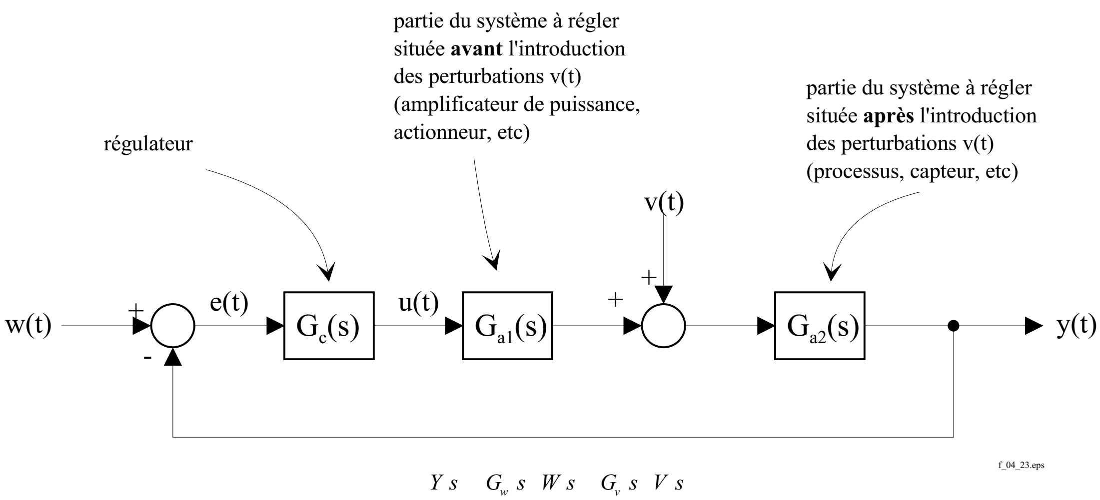


FIG. 4.1 – Schéma fonctionnel universel d'un système de régulation automatique. Le retour est unitaire, i.e. le schéma est sous forme canonique, figure 3.6 page 126) (fichier source).

Les techniques de transformation et de réduction de schémas fonctionnels vues au chapitre 3 permettent de présenter le schéma fonctionnel universel d'un système de régulation automatique linéaire quelconque sous la forme donnée à la figure 4.1. Il s'agit du *schéma fonctionnel universel*, qui fait apparaître les fonctions de transfert

- du régulateur $G_c(s)$,
- de la partie $G_{a1}(s)$ du système à régler située **avant** le point d'introduction des perturbations $v(t)$,

– de la partie $G_{a2}(s)$ du système à régler située **après** le point d'introduction des perturbations $v(t)$,

à partir desquelles les fonctions de transfert
– du système à régler $G_a(s)$,
– en boucle ouverte $G_o(s)$,
– en boucle fermée $G_w(s)$, régulation de correspondance,
– en boucle fermée $G_v(s)$, régulation de maintien,

vont être calculées dans les paragraphes suivants.

4.1.1 Fonction de transfert du système à régler $G_a(s)$

Le système à régler comprend toutes les fonctions de transfert situées entre la commande $u(t)$ donnée par le régulateur et la grandeur réglée mesurée $y(t)$:

$$G_a(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{v(t)=0} = G_{a1}(s) \cdot G_{a2}(s)$$

Les techniques de modélisation évoquées au chap.2 ainsi que celles d'identification mise en pratique en laboratoire (voir aussi [10]) ont pour but de déterminer $G_a(s)$ aussi précisément que nécessaire pour ensuite être en position de sélectionner et de calculer le régulateur à utiliser.

4.1.2 Fonction de transfert en boucle ouverte $G_o(s)$

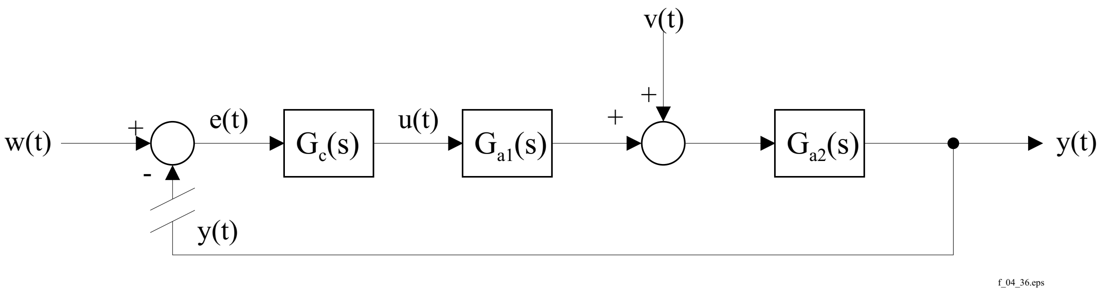


Fig. 4.2 – Fonction de transfert en boucle ouverte (fichier source).

La fonction de transfert en boucle ouverte $G_o(s)$ s'obtient par définition en coupant la boucle de contre-réaction (directement en amont du comparateur), en posant $w(t) = 0$ et $v(t) = 0$, en injectant directement le signal (d'erreur) $e(t)$ (figure 4.2) et en calculant :

$$\boxed{G_o(s) = \left.\frac{Y(s)}{E(s)}\right|_{w(t)=0\ ,v(t)=0\ ,\ \text{boucle ouverte}} = G_c(s) \cdot G_a(s)}$$

A noter que cette règle très simple de calcul de $G_o(s)$ s'applique sans autre si le système est plus compliqué, par exemple s'il n'est pas sous forme canonique (figure 4.3).

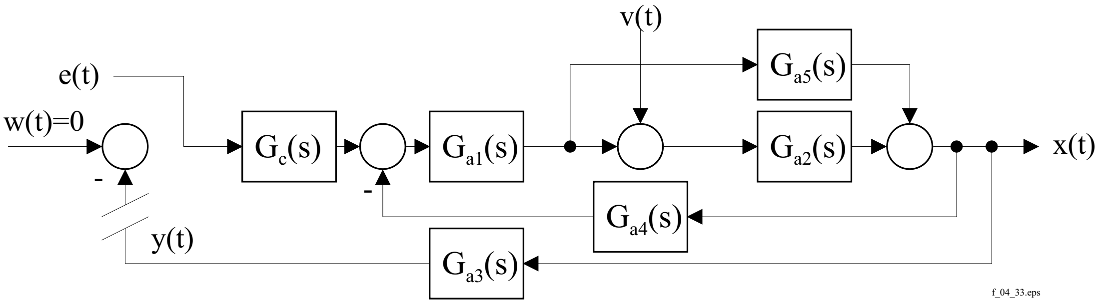


FIG. 4.3 – Fonction de transfert en boucle ouverte d'un système présenté sous une forme quelconque, i.e. non canonique (fichier source).

4.1.3 Fonction de transfert en boucle fermée, régulation de correspondance $G_w(s)$

La fonction de transfert en boucle fermée, régulation de correspondance, permet de déterminer le comportement statique et dynamique du système asservi en poursuite de consigne. On la calcule pour $v(t) = 0$, i.e. sans perturbation, pour bien mettre en évidence l'effet de la consigne seule sur la grandeur réglée :

$$G_w(s) = \left.\frac{Y(s)}{W(s)}\right|_{v(t)=0}$$

En se référant au schéma fonctionnel universel (figure 4.1 page 133, noter que le retour est unitaire), on a :

$$G_w(s) = \left.\frac{Y(s)}{W(s)}\right|_{v(t)=0} = \frac{G_c(s)\cdot G_{a1}(s)\cdot G_{a2}(s)}{1+G_c(s)\cdot G_{a1}(s)\cdot G_{a2}(s)}$$

$$\boxed{G_w(s) = \left.\frac{Y(s)}{W(s)}\right|_{v(t)=0} = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)}}$$

En principe, $G_w \rightarrow 1$ car on s'attend naturellement à ce que $y(t) \rightarrow w(t)$. La conséquence importante en est que $G_o(s)$ devrait être aussi grande que possible (cf dilemme stabilité-précision, § 1.5.3 page 33). En effet :

$$G_w(s) \rightarrow 1 \Longleftrightarrow G_o(s) \rightarrow \infty$$

Pour mettre cela en évidence, on peut présenter $G_w(s)$ sous la forme :

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{1}{1+\frac{1}{G_o(s)}}$$

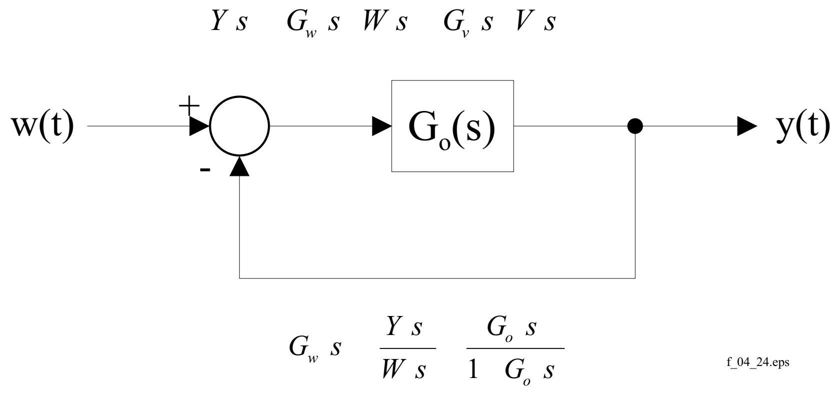


FIG. 4.4 – Fonction de transfert en régulation de correspondance (fichier source).

4.1.4 Fonction de transfert en régulation de maintien $G_v(s)$

$G_v(s)$ traduit l'effet des perturbations $v(t)$ sur la grandeur réglée $y(t)$, lorsque $w(t) = 0$. On a :

$$\boxed{G_v(s) = \left.\frac{Y(s)}{V(s)}\right|_{w(t)=0} = \frac{G_{a2}(s)}{1 + G_c(s) \cdot G_{a1}(s) \cdot G_{a2}(s)} = \frac{G_{a2}(s)}{1 + G_{o(s)}}}$$

On s'attend naturellement à ce que, dans le cas idéal, $G_v(s) \rightarrow 0$, traduisant une

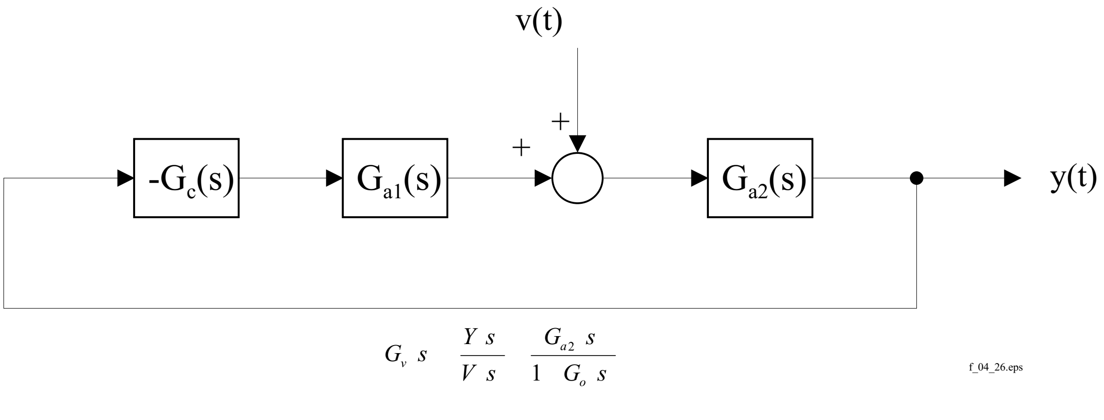


FIG. 4.5 – Fonction de transfert en régulation de maintien (fichier source).

insensibilité aux perturbations, ce qui est le cas si $G_o(s) \rightarrow \infty$.

4.2 Réponse du système asservi travaillant dans les deux modes de régulation

Par linéarité, on peut simplement écrire que la réponse du système asservi à l'effet simultané de la consigne et de la perturbation est donnée par

$$Y(s) = G_{\mathsf{w}}(s) \cdot W(s) + G_{\mathsf{v}}(s) \cdot V(s)$$

puis selon la définition de la linéarité du § 1.7.5 page 44, *les causes ajoutent leurs effets*. Il est dès lors possible de calculer $y(t)$ par transformée de Laplace inverse :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G_{\mathsf{w}}(s) \cdot W(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{G_{\mathsf{v}}(s) \cdot V(s)\}$$

4.3 Régulateur PID analogique

4.3.1 Introduction

Le régulateur, dont la fonction de transfert est désignée par G_c(s) (*"controller"*, Regler), est situé en amont du système à régler $G_a(s)$.

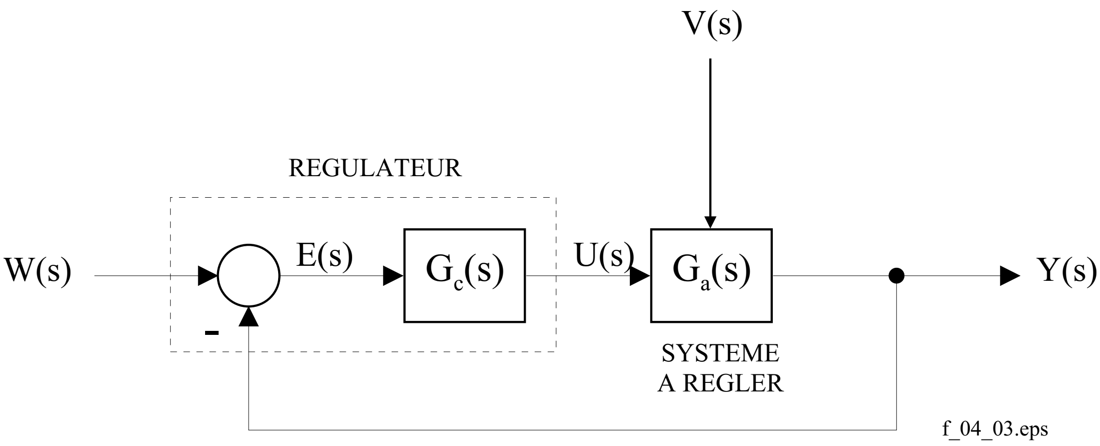


FIG. 4.6 – Schéma fonctionnel d'un système asservi mono-variable. On distingue le régulateur $G_c(s)$ et le système à régler $G_a(s)$ (fichier source).

Le système à régler G_a(s) comprend, outre le processus, l'amplificateur de puissance, l'actionneur, le capteur et l'électronique de traitement de la mesure associée.

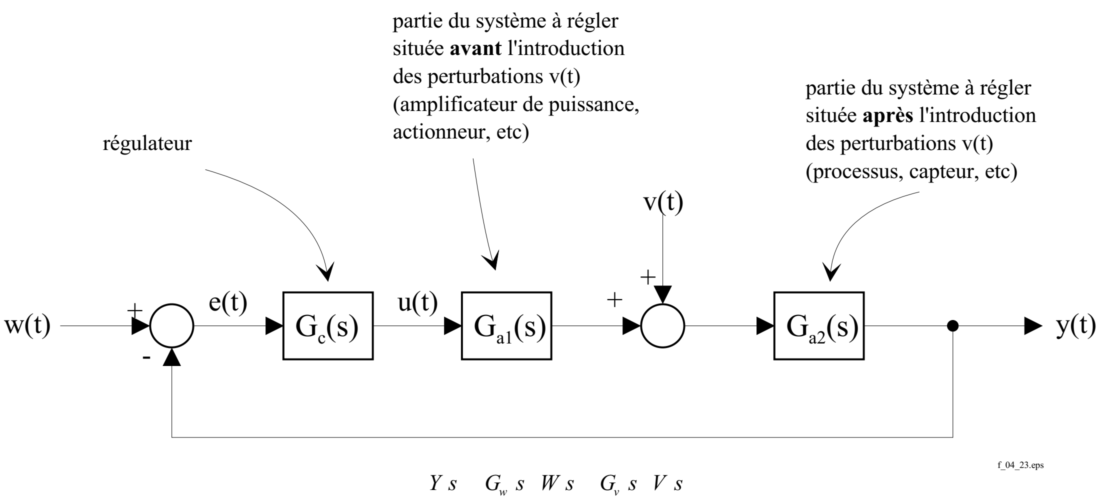


FIG. 4.7 – Schéma fonctionnel universel d'un système asservi (fichier source).

L'entrée du régulateur comprend forcément la consigne $w(t)$ et la mesure $y(t)$ de la grandeur réglée. Le plus souvent la comparaison

$$e(t) = w(t) - y(t)$$

directe est effectuée, appelée écart ou **erreur**.

Le régulateur a pour charge de maintenir le signal d'erreur $e(t)$ aussi proche de zéro que possible ; dans ce but, il fournit au système à régler la commande $u(t)$ telle que l'image $y(t)$ de la **grandeur réglée** obtenue par mesure tende à correspondre à la **consigne** $w(t)$.

La commande $u(t)$ est construite sur la base des signaux de consigne $w(t)$ et de mesure $y(t)$ de la grandeur réglée selon la **loi de commande**

$$u(t) = u\left(w(t), y(t)\right).$$

Réalisée par une électronique de signal (amplificateurs opérationnels) voire implantés dans un microprocesseur (§ 1.6 page 40), cette commande est en général d'un faible niveau de puissance, raison pour laquelle un amplificateur de puissance est normalement intercalé entre le régulateur et le processus à proprement parler. Ledit amplificateur de puissance fait dès lors partie intégrante du système à régler (§ 4.1.1 page 134).

Appliquée au système à régler, la commande $u(t)$ provoque donc une modification de la grandeur réglée $y(t)$. Le régulateur en tenant compte pour former $u(t)$, on constate que $y(t)$ apparaît :

- à l'origine de l'action entreprise par le régulateur ;
- comme conséquence de cette action.

Représenté graphiquement sous forme de schéma fonctionnel, le système présente donc une boucle, i.e. une boucle de contre-réaction.

La **loi de commande** du régulateur peut être très simple (régulateur tout-ou-rien, appelé aussi régulateur à action à 2 positions)

$$u(t) = u_{max} \qquad \text{si} \qquad e(t) > 0$$

$$u(t) = u_{min} \qquad \text{si} \qquad e(t) < 0$$

ou beaucoup plus compliquée (régulateurs flous, réseaux de neurones).

4.3.2 Régulateurs non-linéaires

Si l'on imagine vouloir régler la température d'une salle et la maintenir aux environs de 20 [°C], on se dit qu'il suffit d'enclencher ou déclencher le chauffage selon que la température ambiante est plus petite ou plus grande que la température souhaitée (figure 4.8).

Avec ce régulateur, appelé tout-ou-rien, ou encore à action à deux positions, la température oscillera légèrement autour de 20 [°C] et cela à satisfaction des utilisateurs de la salle. Cependant, le chauffagiste risque d'être très mécontent car il verra la chaudière s'enclencher et déclencher sans cesse pour de courts instants. Cette situation n'est pas acceptable pratiquement. Pour éviter cela, on lui préfère

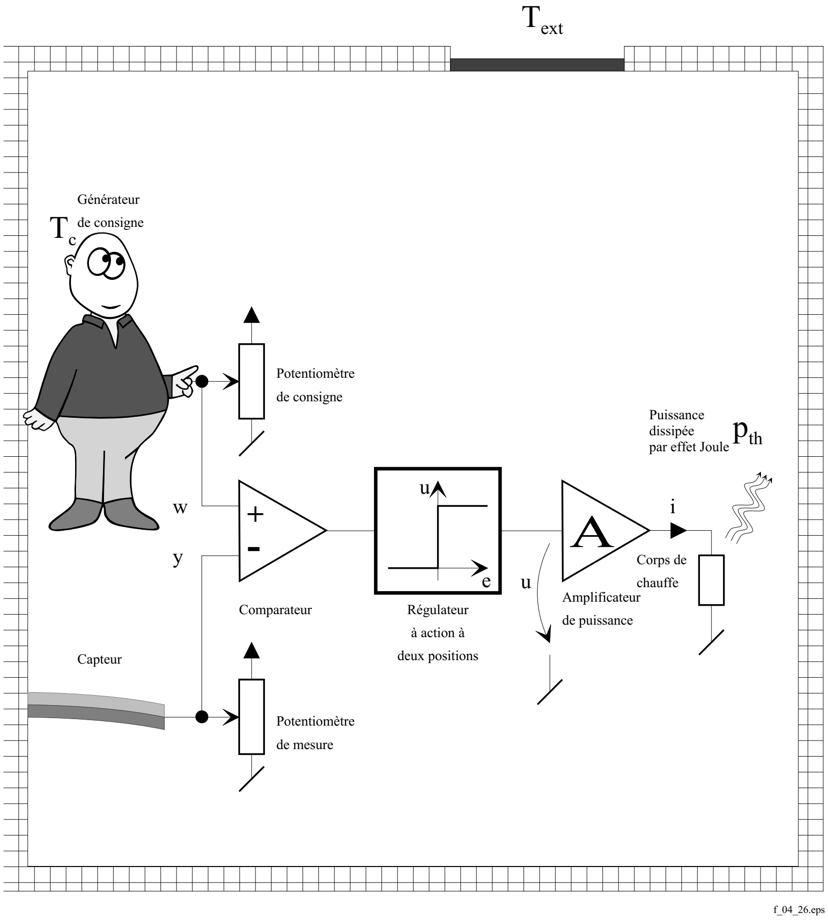


FIG. 4.8 – Régulation automatique de la température d'un local (fichier source).

un autre régulateur à deux niveaux avec hystérèse (figure 4.9 page suivante). Dans ce cas, on verra la température osciller avec plus d'amplitude autour de 20 [°C] et cela sans gêne pour le confort des personnes présentes. De son côté, le chauffagiste sera satisfait, car la chaudière s'enclenchera et déclenchera pour des

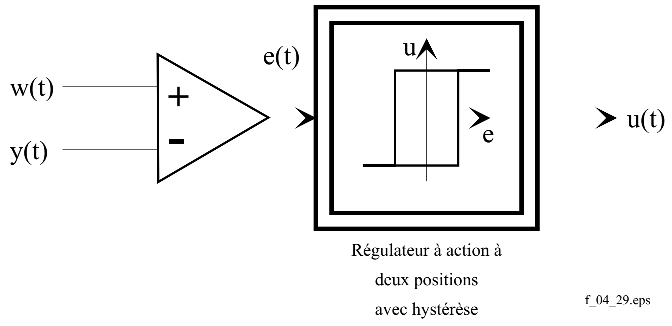


FIG. 4.9 – Régulateur à action à deux position avec hytérèse (fichier source).

durées raisonnables préservant ainsi sa durée de vie. Il faut cependant noter que

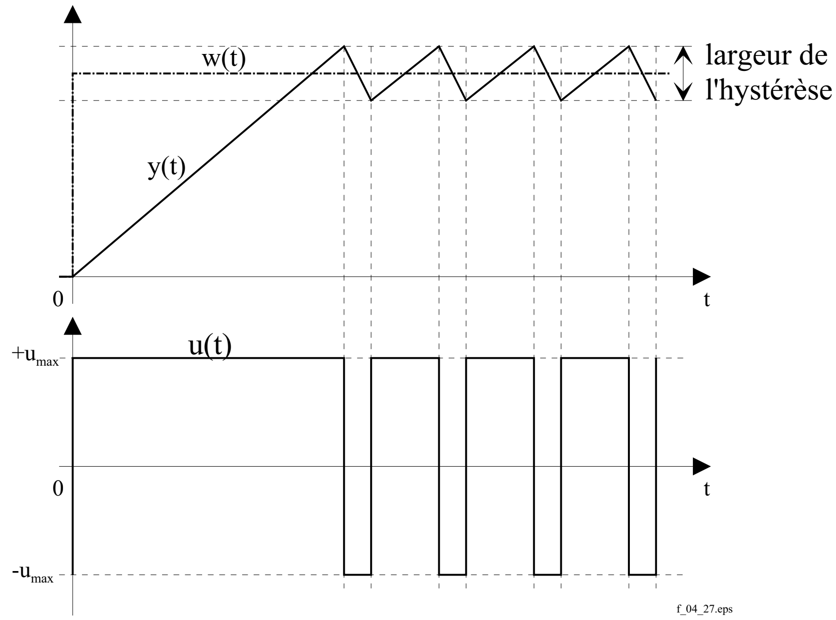


FIG. 4.10 – Allure de la grandeur réglée (température mesurée) lors d'un asservissement par régulateur à action à deux position avec hytérèse (fichier source).

la non-linéarité de ces régulateurs simples rend difficile leur synthèse sur la base d'un cahier des charges fixant les performances du système asservi. Malgré cela, ils sont fréquemment utilisés pour des applications dont l'actionneur supporte une forte sollicitation et pour lesquelles une oscillation constante de la grandeur réglée $y(t)$ autour de la consigne $w(t)$ est admissible. Un exemple d'application est la régulation du courant fournit par une alimentation à découpage [9].

Dans ce qui suit, on se limitera à la présentation et à l'étude du régulateur **PID**, de loin le régulateur le plus utilisé en pratique.

4.3.3 Régulateur à action proportionnelle (P)

Loi de commande, fonction de transfert, réponses indicielle et harmonique du régulateur P

Le régulateur à action proportionnelle, ou régulateur **P**, a une action simple et naturelle, puisqu'il construit une commande $u(t)$ proportionnelle à l'erreur $e(t)$. Cette action s'apparente à un effet ressort (ressort de rappel).

– Loi de commande du régulateur P :

$$\boxed{u(t) = K_p \cdot e(t)}$$

– Fonction de transfert du régulateur P :

$$\boxed{G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p}$$

– Schéma fonctionnel du régulateur P (figure 4.11)

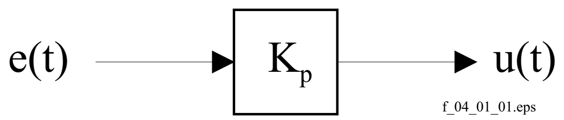


FIG. 4.11 – Représentation d'un régulateur P par son schéma fonctionnel (f_04.dsf).

– Réponse indicielle du régulateur P :

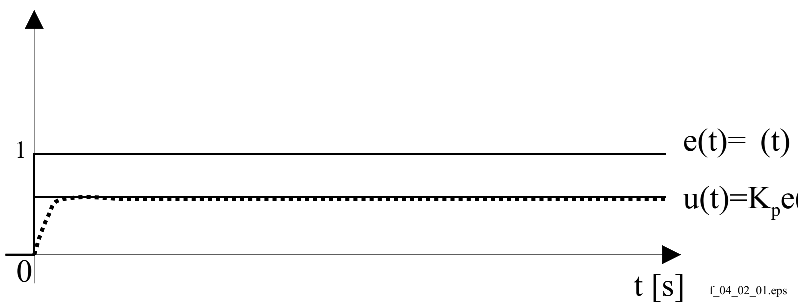


FIG. 4.12 – Réponse indicielle du régulateur P (idéal). La réponse en traitillé rappelle qu'aucun système physique ne peut réagir statiquement, i.e. sans retard. Dans le cas d'une réalisation électronique (à amplificateurs opérationnels par exemple) du régulateur P, il est clair que le temps de montée esquissé est en principe négligeable par rapport aux constantes de temps du système à régler (fichier source).

– Réponse harmonique du régulateur P (figure 4.13)

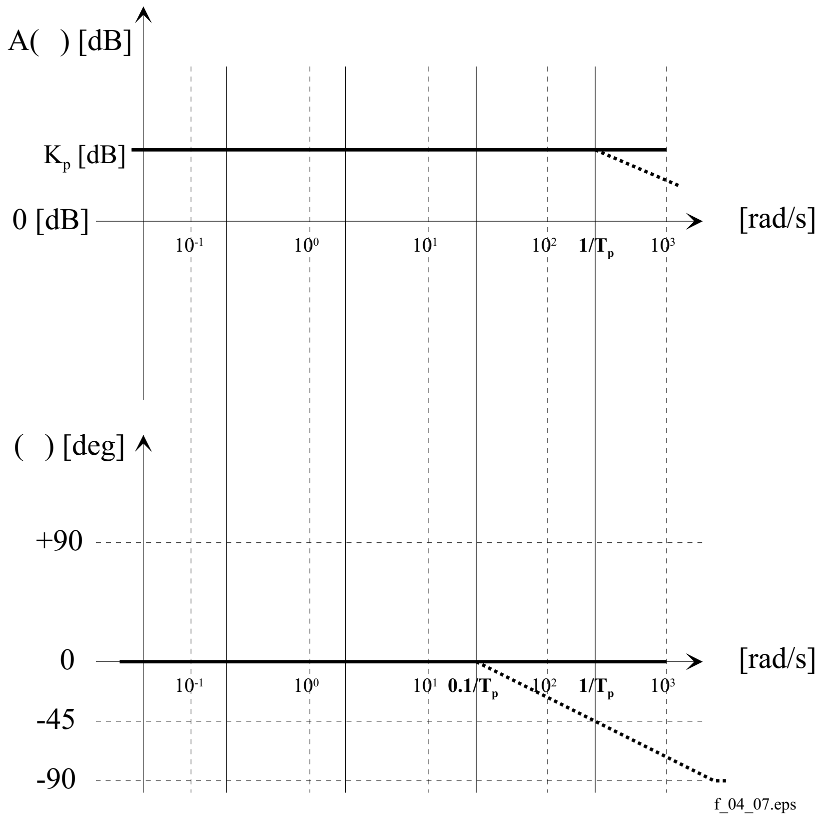


FIG. 4.13 – Réponse harmonique du régulateur P (fichier source).

L'atténuation esquissée en traitillé à partir de la pulsation $\frac{1}{T_p}$ rappelle que la caractéristique entrée-sortie de tout élément physiquement réalisable tend toujours vers 0 lorsque la fréquence tend vers l'infini. Dans le cas du régulateur P, elle est par exemple due aux limites en fréquence de l'amplificateur opérationnel utilisé pour sa réalisation électronique (figure 4.14 page suivante).

Les inductance et capacité parasites des résistances pourraient également intervenir, certes à plus haute fréquence.

Avantages et inconvénients de l'action proportionnelle

On voit que le régulateur P assure une transmission instantanée du signal d'erreur ; dans ce sens, son action est relativement dynamique : sa commande ne dépend pas du passé, ni d'une tendance, mais simplement de ce qui se passe à l'instant présent.

Une limitation du régulateur P est son incapacité à annuler notamment l'erreur statique $E_{\infty v}$ en régulation de maintien, i.e. celle qui apparaît consécutivement à l'intervention d'une perturbation constante. En effet, si la commande $u(t)$ à

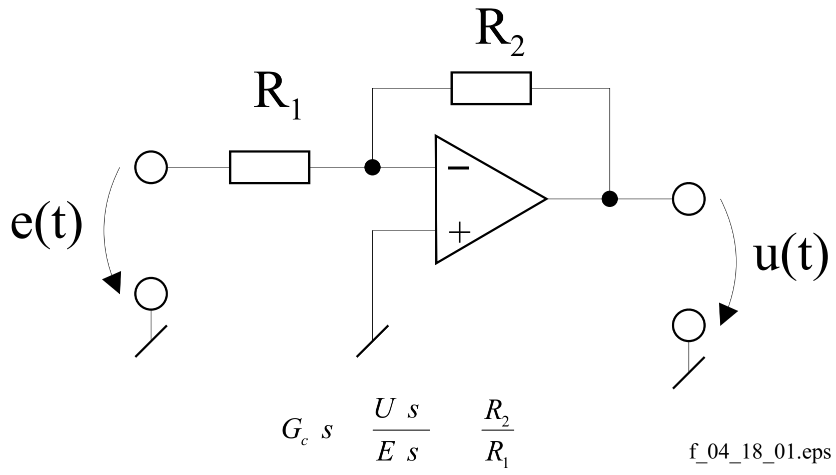


FIG. 4.14 – Schéma de principe de la réalisation électronique d'un régulateur P (fichier source).

appliquer au système doit être non-nulle afin que celui-ci puisse retrouver ou maintenir son état d'équilibre, il est dans le même temps nécessaire que l'erreur soit non-nulle puisque :

$$u(t) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad u(t) = K_p \cdot e(t) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e(t) \neq 0$$

La figure 4.15 page suivante illustre le phénomène pour le système à régler

$$G_a(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(1+s)\cdot(1+s\cdot 0.01)}$$

contre-réactionné par un régulateur P de gain $K_p = 50$.

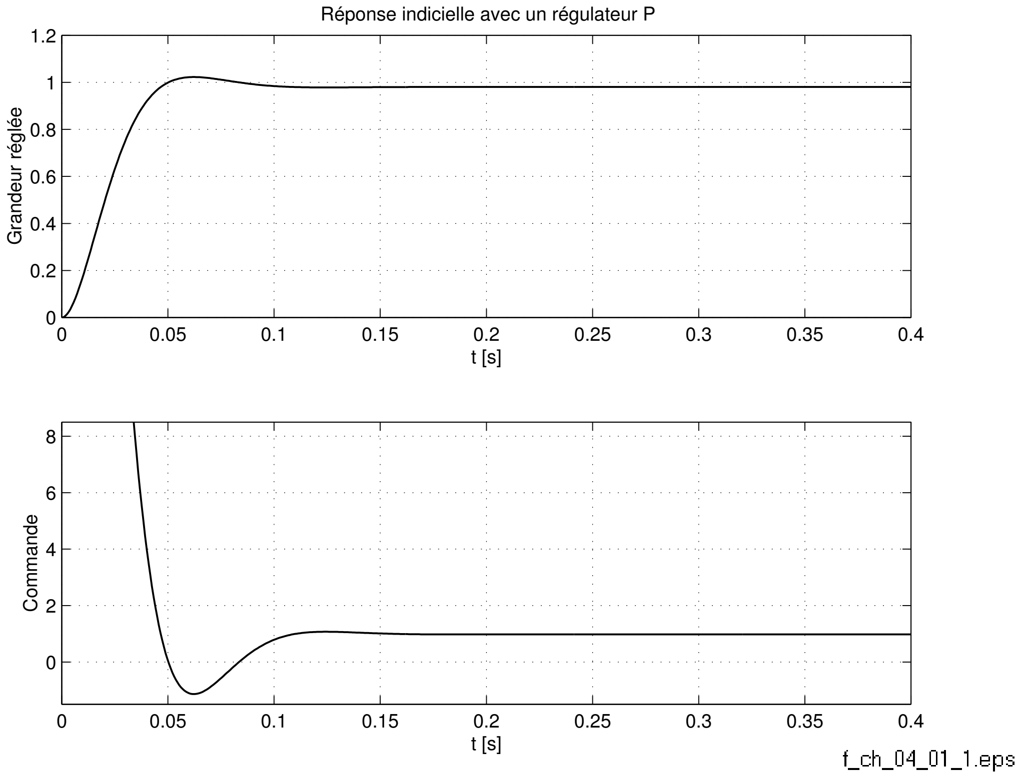


FIG. 4.15 – Réponse indicielle en boucle fermée avec asservissement par régulateur P : une erreur statique subsiste car le signal de commande $u(t)$ à appliquer au système à régler $G_a(s)$ doit être dans ce cas non-nul pour que $y(t)$ atteigne un niveau différent de zéro (fichier source).

4.3.4 Régulateur à action intégrale (I)

Le problème de l'erreur statique

Les exemples des asservissements de vitesse et de température vus au chapitre 1 ont montré qu'un système, même contre-réactionné par un régulateur P, pouvait présenter une erreur permanente en régime permanent constant. Cette erreur intervenant alors que les signaux d'entrée (consigne ou perturbation) sont constants, on la désigne par **erreur statique**.

Dans le cas de la régulation de vitesse (§ 1.5.2 page 32), ce phénomène s'explique par le fait que même dans un cas aussi banal que lorsque le moteur est à vitesse constante ($\omega = \text{const.}$) et à vide ($T_{em} = 0\,[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]$), le moteur DC doit être alimenté par une tension aux bornes de l'induit $u_a(t)$ égale à la tension induite de mouvement $e_m(t)$:

$$u_a(t) = R_a \cdot \overbrace{i_a(t)}^{\frac{T_{em}}{K_T}=0\,[\mathrm{A}]} + \overbrace{e_m(t)}^{K_E\cdot\omega\neq 0\,[\mathrm{V}]}$$

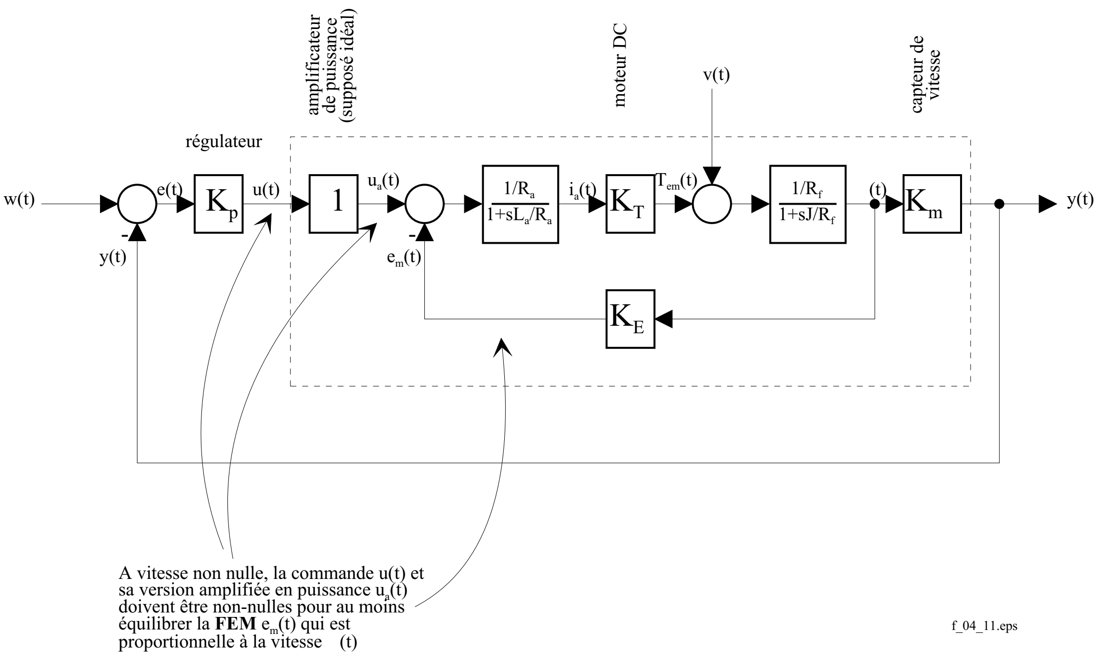


FIG. 4.16 – Asservissement de vitesse d'un moteur DC. La tension $u_a(t)$ aux bornes de l'induit doit être non-nulle si la vitesse $\omega(t)$ est différente de zéro, ne serait-ce que pour équilibrer (au moins) la FEM $e_m(t)$ (fichier source).

Ainsi, même en régulation de correspondance, soit sans couple résistant, l'erreur statique est non nulle :

$$u(\infty) = e_m(\infty) = K_p \cdot e(\infty) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_{\infty w} \neq 0$$

Il faut donc que le système présente une erreur pour qu'une tension d'alimentation $u_a(\infty)$ non-nulle soit appliquée aux bornes de l'induit.

Il n'en va pas autrement en régulation de maintien : si des perturbations de couple interviennent, telles que les frottements sec ou visqueux (figure 4.17) ou plus généralement un couple résistant $T_{res}(t)$ agissant sur son arbre, le moteur doit fournir du couple pour les compenser afin de se maintenir en état d'équilibre. Ce couple (moteur) ne peut alors être fourni que si la tension $u_a(t)$ aux bornes de l'induit est supérieure à la tension induite $e_m(t)$:

$$u_a(t) = R_a \cdot \overbrace{i_a(t)}^{\frac{T_{em}}{K_T} \neq 0\,[\mathrm{A}]} + \overbrace{e_m(t)}^{K_E \cdot \omega \neq 0\,[\mathrm{V}]}$$

Celle-ci étant positive différente de zéro puisque le moteur tourne, $u_a(t)$ doit donc être positive différente de zéro. Avec un régulateur de type P, l'erreur ne peut donc qu'être différente de zéro et le système asservi présente donc ce qu'on appelle du **statisme**.

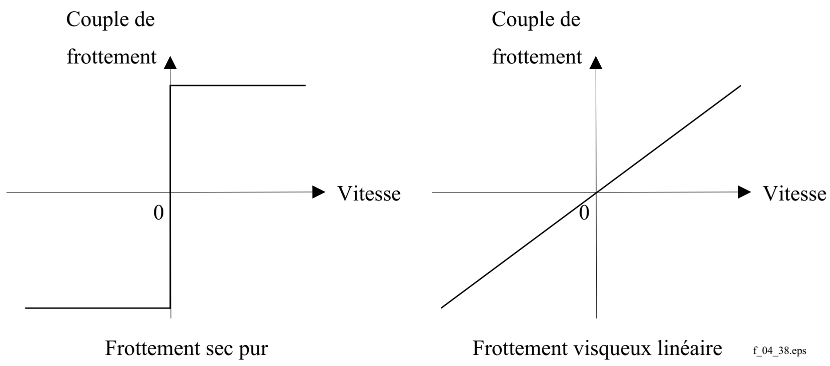


FIG. 4.17 – Caractéristiques couple/force-vitesse des frottements sec et visqueux idéaux (fichier source)

Annulation de l'erreur statique

Pour remédier au problème du statisme, on pourrait dans un premier temps augmenter la consigne de la valeur de l'erreur statique constatée E_∞ (figure 4.18 page suivante).

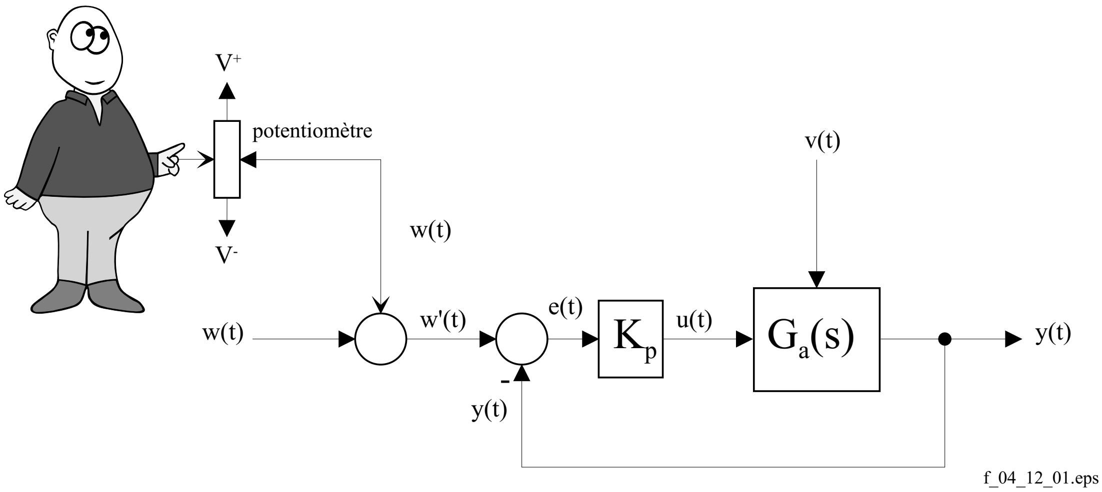


FIG. 4.18 – Annulation manuelle de l'erreur statique par décalage de la consigne (fichier source).

Sur cette lancée, on pourrait décider d'agir directement sur la commande $u(t)$ en procédant comme suit (figure 4.19) :

- ajouter à la commande $u_p(t)$ issue du régulateur P la quantité ajustable $u_i(t)$;
- augmenter ou diminuer $u_i(t)$ progressivement jusqu'à ce que $e(t)$ soit nulle ;
- u_p est alors nulle ($u_p = 0$) et u_i est exactement égale à la valeur nécessaire à la compensation de l'erreur statique, et bien que l'erreur soit nulle, la commande $u(t) = u_p(t) + u_i(t)$ est bel et bien non-nulle.

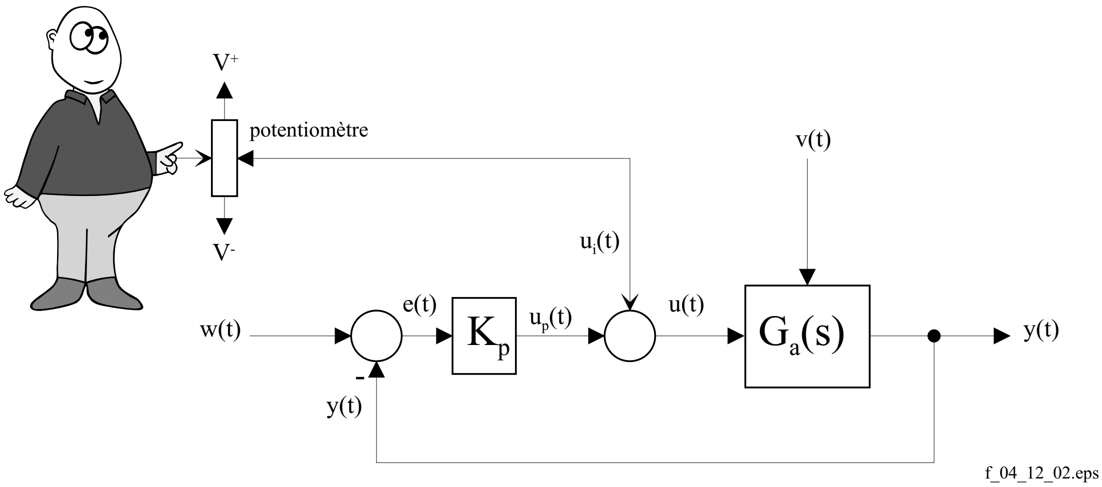


FIG. 4.19 – Annulation manuelle de l'erreur statique par augmentation du signal de commande (fichier source).

En vue d'automatiser cette procédure, on la transcrit sur le diagramme de la figure 4.20. On voit qu'il s'agit de trouver un élément, complétant l'action P,

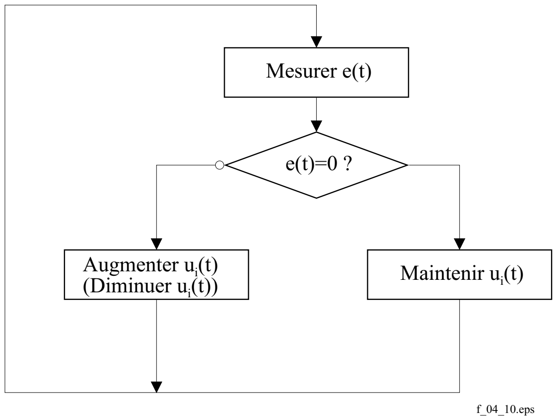


FIG. 4.20 – Annulation manuelle de l'erreur statique par augmentation du signal de commande : suite des opérations effectuées (fichier source).

qui accumule le signal d'entrée $e(t)$ et se maintient à son dernier niveau lorsque l'erreur est nulle : la solution automatisée de la procédure consiste à **intégrer l'erreur**. La loi de commande est donc :

$$u_i(t) = \frac{1}{T_i} \cdot \int_{-\infty}^{t} e(\tau) \cdot d\tau$$

La commande proposée est formée des deux contributions u_p et u_i, contributions proportionnelle (P) et intégrale (I). Le régulateur est donc à actions proportionnelle et intégrale : c'est un régulateur **PI** (figure 4.21 page suivante).

Loi de commande, fonction de transfert, réponses indicielle et harmonique du régulateur PI

– Loi de commande du régulateur PI :

$$\boxed{u(t) = K_p \cdot \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_{-\infty}^{t} e(\tau) \cdot d\tau \right)}$$

– Fonction de transfert du régulateur PI :

$$\boxed{G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot \frac{1 + s \cdot T_i}{s \cdot T_i}}$$

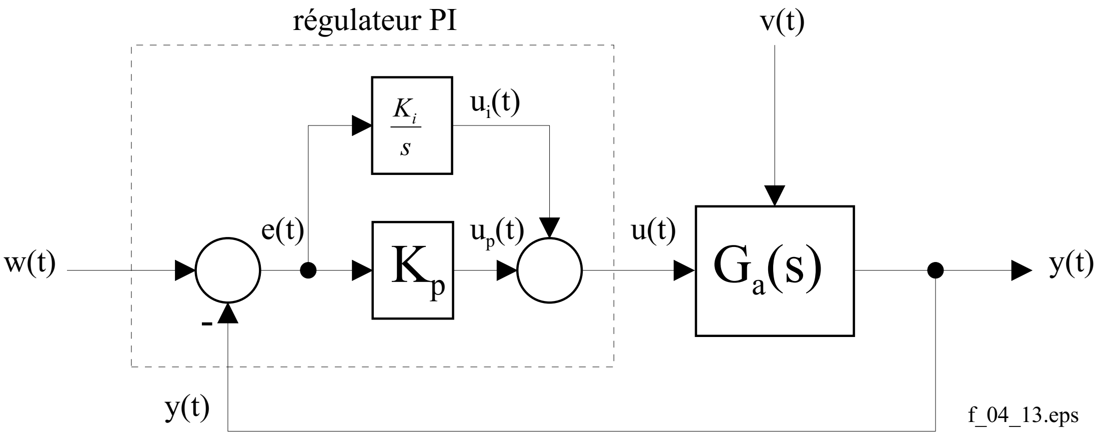


FIG. 4.21 – Asservissement par régulateur PI (fichier source).

– Schéma fonctionnel du régulateur PI :

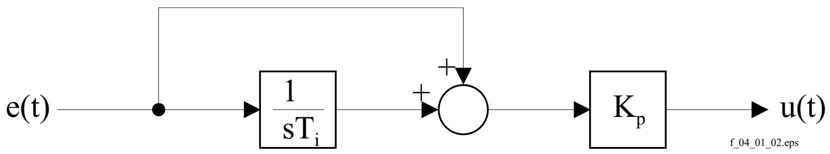


FIG. 4.22 – Schéma fonctionnel du régulateur PI (fichier source).

– Réponse indicielle du régulateur PI :

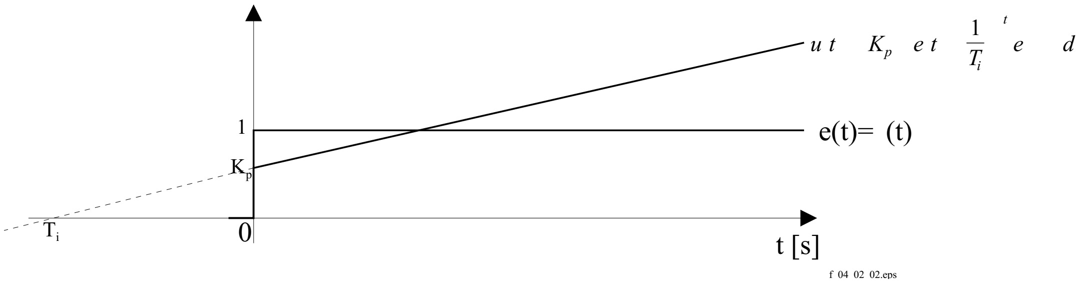


FIG. 4.23 – Réponse indicielle du régulateur PI (fichier source).

– Réponse harmonique du régulateur PI :

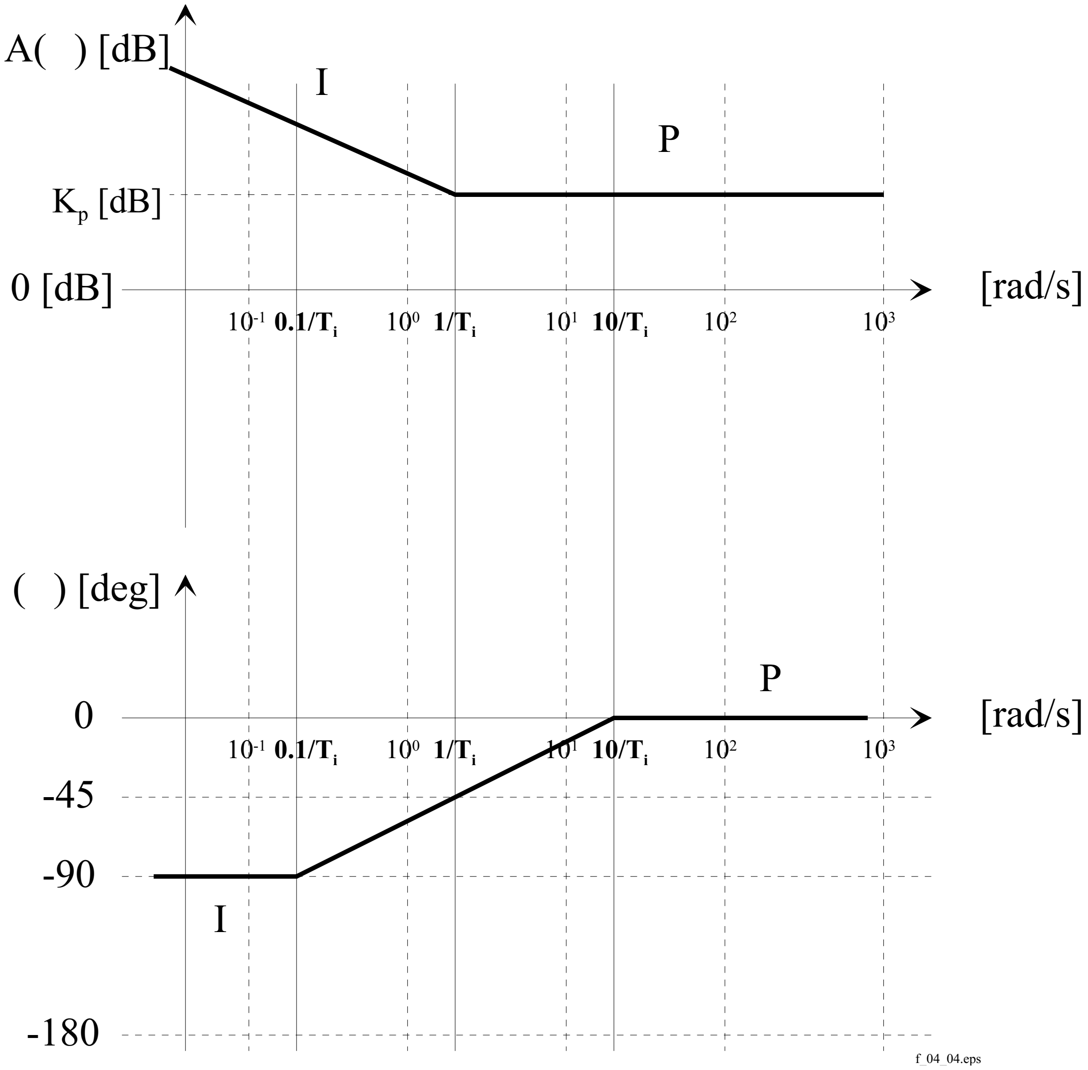


Fig. 4.24 – Réponse harmonique du régulateur PI (fichier source).

– Réalisation électronique de principe :

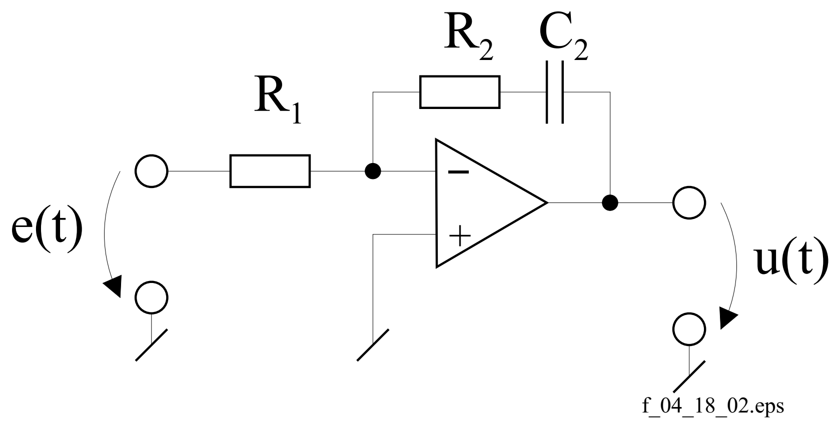


FIG. 4.25 – Réalisation électronique de principe d'un régulateur PI (fichier source).

A la mise sous tension de l'installation, il faut veiller à ce que la capacité C_2 soit initialisée à une valeur correcte (en principe déchargée), sans quoi le système risque d'emblée de recevoir un saut de commande $u(t)$. Un dispositif de décharge de C_2 est donc à prévoir.

Le régulateur PI est le régulateur le plus utilisé en pratique où ses contributions à la **précision** mais aussi à la **robustesse** du système asservi sont particulièrement appréciées.

Régulateur I pur

L'action P du régulateur PI n'est pas utile du point de vue de la précision en régime permanent ; cependant, le fait que l'action P permette la transmission instantanée du signal d'erreur rend le régulateur PI plus dynamique que le régulateur I pur discuté ici, mis en oeuvre dans quelques cas particuliers où la rapidité n'est pas importante et où l'on souhaite avoir une action relativement "molle" sur le système à régler.

– Loi de commande du régulateur I :

$$u(t) = \frac{K_p}{T_i} \cdot \int_{-\infty}^{t} e(\tau) \cdot d\tau = K_i \cdot \int_{-\infty}^{t} e(\tau) \cdot d\tau$$

– Fonction de transfert du régulateur I :

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_p}{s \cdot T_i} = \frac{K_i}{s}$$

Remarque La fonction de transfert ci-dessus est bel et bien celle d'un régulateur I pur : elle traduit le fait que la commande $u(t)$ délivrée par le régulateur est **proportionnelle à l'intégrale de l'erreur**. Elle ne comporte donc pas de contribution proportionnelle à l'erreur et doit de ce fait être distinguée du régulateur PI qui lui comporte les 2 actions simultanément. Il s'agit d'une confusion rencontrée chez certains étudiants ...

Avantages et inconvénients de l'action intégrale

La réponse harmonique du régulateur PI (figure 4.24 page 151) montre que celui-ci est à action plutôt intégrale à basse fréquence et plutôt proportionnelle à haute fréquence. Ce comportement intégrateur à basse fréquence fait l'avantage du principal du régulateur PI, son action I permettant d'annuler une erreur statique. Cela peut également se comprendre en observant sur la réponse harmonique qu'à basse fréquence, le gain de l'intégrateur tend vers l'infini : en d'autres termes, le gain de boucle

$$G_o(j\omega) = G_c(j\omega) \cdot G_a(j\omega)$$

tend vers l'infini et l'on a, en régulation de correspondance d'une part

$$G_w(j \cdot \omega) = \frac{Y(j \cdot \omega)}{W(j \cdot \omega)} = \frac{G_o(j \cdot \omega)}{1 + G_o(j \cdot \omega)} \to 1 \qquad \text{pour} \qquad G_o(j \cdot \omega) \to \infty$$

et en régulation de maintien d'autre part

$$G_v(j \cdot \omega) = \frac{Y(j \cdot \omega)}{V(j \cdot \omega)} = \frac{G_{a2}(j \cdot \omega)}{1 + G_o(j \cdot \omega)} \to 0 \qquad \text{pour} \qquad G_o(j \cdot \omega) \to \infty$$

L'examen de ces deux fonctions de transfert en boucle fermée, évaluées en basses fréquences, peut montrer un autre avantage du terme intégrateur : si le gain $G_a(j\omega)$ varie quelque peu, par suite de l'usure, du vieillissement, de la température, etc, les performances en boucle fermée du système ne s'en ressentent que faiblement puisque l'on a approximativement :

$$G_w(j \cdot \omega) = \frac{Y(j \cdot \omega)}{W(j \cdot \omega)} = \frac{G_o(j \cdot \omega)}{1 + G_o(j \cdot \omega)} \to \frac{\infty}{1 + \infty} \to 1$$

$$G_v(j \cdot \omega) = \frac{Y(j \cdot \omega)}{V(j \cdot \omega)} = \frac{G_a(j \cdot \omega)}{1 + G_o(j \cdot \omega)} \to \frac{G_a(j \cdot \omega)}{1 + \infty} \to 0$$

On dit que le régulateur à action intégrale améliore la **robustesse** du système, rendant en particulier ses performances de précision peu dépendantes des variations des paramètres (notamment du gain permanent K_a) du système à régler $G_a(s)$.

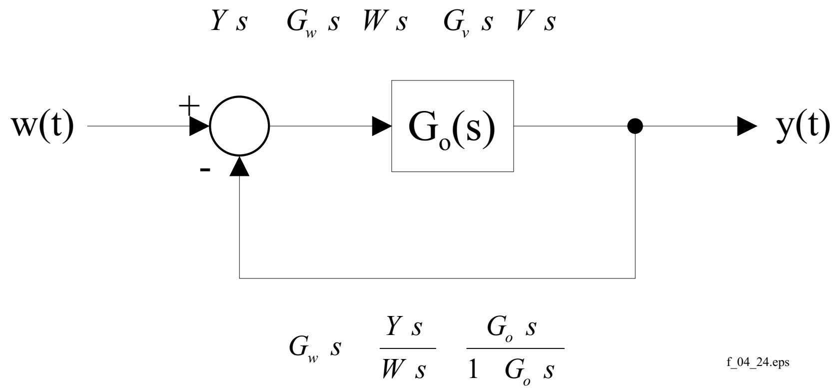


FIG. 4.26 – Schéma fonctionnel pour le calcul de la fonction de transfert en boucle fermée, régulation de correspondance (fichier source)

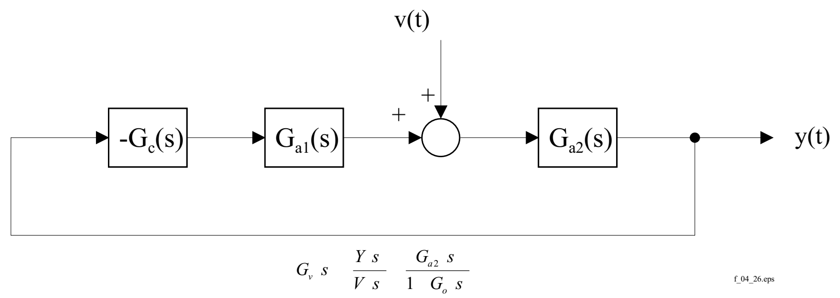


FIG. 4.27 – Schéma fonctionnel pour le calcul de la fonction de transfert en boucle fermée, régulation de maintien (fichier source)

L'inconvénient du régulateur PI peut se déduire directement de sa réponse fréquentielle (figure 4.24 page 151), laquelle montre qu'à basse fréquence, tous les signaux sont déphasés de -90 [°] : l'action intégrale est lente et ralentit ainsi la propagation des signaux dans la boucle. Elle augmente ainsi le **risque d'instabilité** inhérent à tout système contre-réactionné. Il faut donc être sur ses gardes lorsque l'on s'apprête à mettre en oeuvre un régulateur comprenant une action intégrale. Dans le meilleur des cas, la stabilité du système est maintenue grâce au talent de l'ingénieur automaticien mais ses **performances dynamiques** (rapidité) sont forcément dégradées en comparaison des résultats obtenus avec un régulateur P seul. On obtient donc un système asservi plus précis mais moins rapide.

De plus, **la commande intégrale atteignant son maximum lorsque l'erreur est nulle**, i.e. lorsque la grandeur réglée $y(t)$ atteint la consigne $w(t)$, il est vraisemblable (mais pas garanti) que la réponse indicielle (en régulation de correspondance) du système asservi présente un dépassement de la consigne plus important qu'avec un régulateur P. En effet, en se plaçant dans la situation où le système asservi reçoit un saut de consigne $w(t) = \varepsilon(t)$, on comprend d'une manière intuitive que la contribution intégrale ne cesse de croître que lorsque l'erreur s'annule (figure 4.28). Ainsi, l'action I "pousse" de plus en plus le système tout pendant que l'erreur est de même signe et l'entraîne d'autant plus violemment que le gain $\frac{K_p}{T_i}$ sur cette action est élevé. Si, au moment t_{01} où l'erreur s'annule pour la première fois, la commande $u(t_{01})$ est trop élevée, le système dépasse la consigne et l'erreur change de signe : il y a dépassement. Ceci est en fait nécessaire pour que la commande atteigne son niveau final, l'erreur devant forcément changer de signe afin de diminuer le contenu de l'intégrateur, lequel devant trouver le niveau requis pour maintenir le système à son nouvel état d'équilibre $y(\infty)$ déterminé par la consigne.

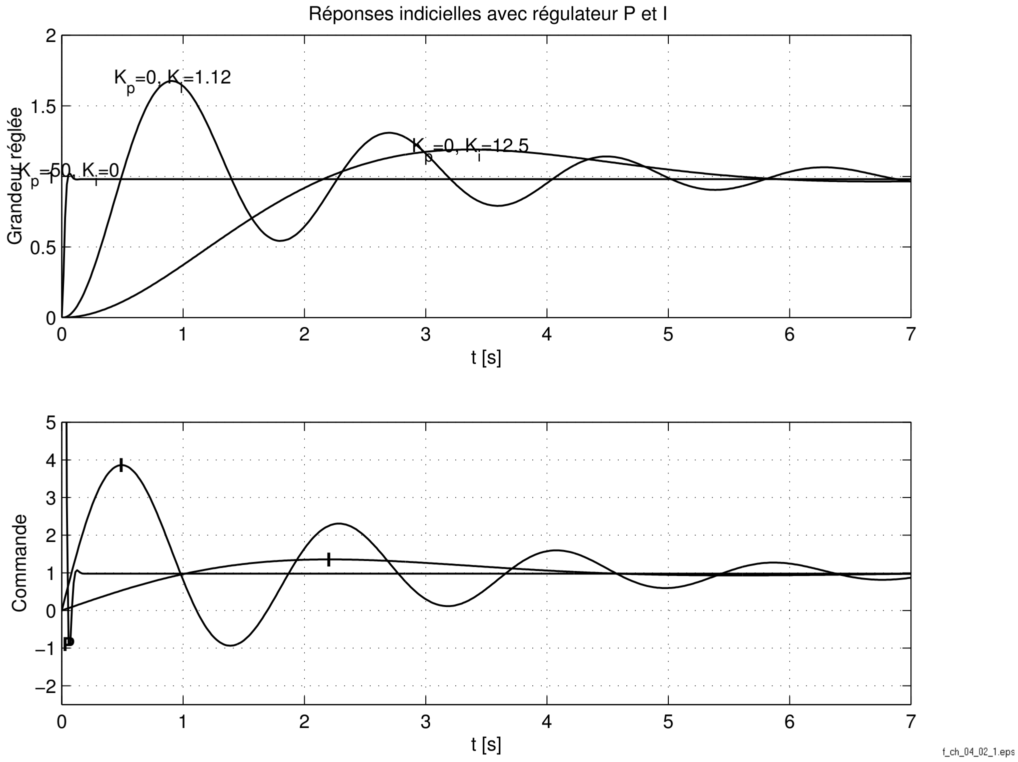


FIG. 4.28 – Réponses indicielles en boucle fermée, régulateur P pur avec $K_p = 50$, I pur avec $K_i = 12.5$ et $K_i = 1.12$ (fichier source).

La figure 4.28 illustre le phénomène pour le système à régler

$$G_a(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(1+s)\cdot(1+s\cdot 0.01)}$$

contre-réactionné de trois manières différentes :
- régulateur P de gain $K_p = 50$;
- régulateur I pur de gain $K_i = 1.12$;
- régulateur I pur de gain $K_i = 12.5$.

On observe qu'en t_{01}, pour $K_p = 0$, l'erreur s'annule mais les commandes sont respectivement nulle et maximale pour les régulateurs P et I. De plus, lorsque le gain sur l'action intégrale est trop élevé, un comportement oscillatoire mal amorti est observable. Enfin, il vaut la peine de remarquer qu'avec le régulateur P, une erreur statique subsiste alors qu'en revanche, le système est beaucoup plus rapide.

4.3.5 Régulateur à action proportionnelle (P) et dérivée (D)

Considérons les deux situations suivantes (figure 4.29), où l'erreur $e(t_0)$ a la même amplitude, mais où

- elle croît dans le premier cas ;
- elle décroît dans le second cas.

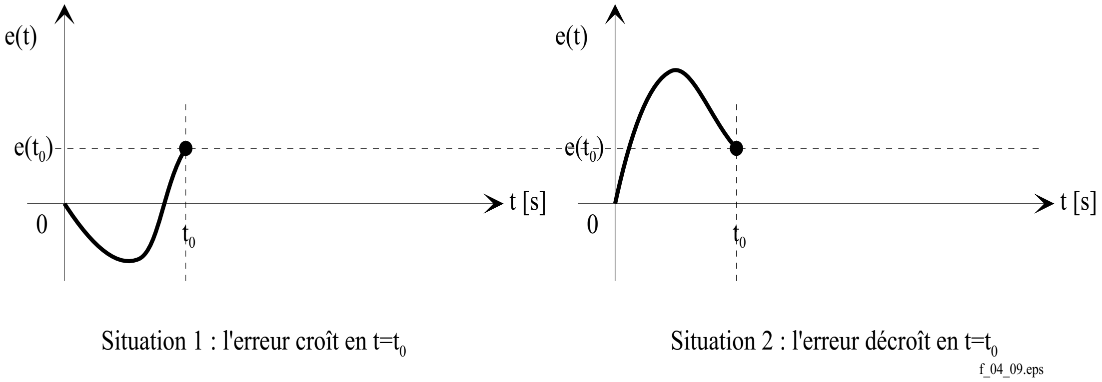


FIG. 4.29 – Présentation de situations d'asservissement identiques en $t = t_0$ pour un régulateur P (fichier source).

Intuitivement, on conçoit qu'il serait illogique d'appliquer dans ces deux situations la même commande $u(t_0)$, bien que ce soit bel et bien l'action qu'entreprendrait un régulateur de type P !

Il vient alors l'idée de former la commande $u(t_0)$ non pas en tenant compte exclusivement de l'amplitude de l'erreur (action P) à l'instant considéré t_0, mais aussi de son **évolution**, dans le but de savoir quelle est la tendance du signal d'erreur et d'en quelque sorte de la prévoir. Un bon moyen consiste à évaluer son taux de variation, à savoir sa pente en calculant la dérivée de l'erreur en t_0.

Pour ce faire, la dérivée par rapport au temps $\frac{de}{dt}$ du signal d'erreur $e(t)$ est calculée au moyen d'un bloc fonctionnel. Multipliée par un gain ajustable T_d afin de pouvoir doser son action, cette contribution est ensuite ajoutée à celle de l'action P. La loi de commande du régulateur PD obtenu est alors :

$$u(t) = K_p \cdot \left(e(t) + T_d \cdot \frac{de}{dt} \right)$$

Loi de commande, fonction de transfert, réponses indicielle et harmonique du régulateur PD

– Loi de commande du régulateur PD :

$$\boxed{u(t) = K_p \cdot \left(e(t) + T_d \cdot \frac{de}{dt} \right)}$$

– Fonction de transfert du régulateur PD :

$$\boxed{G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot (1 + s \cdot T_d)}$$

– Schéma fonctionnel du régulateur PD :

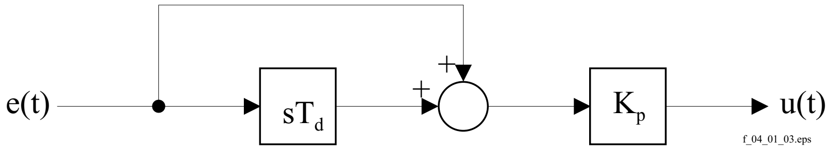


FIG. 4.30 – Schéma fonctionnel du régulateur PD (fichier source).

– Réponse indicielle du régulateur PD :

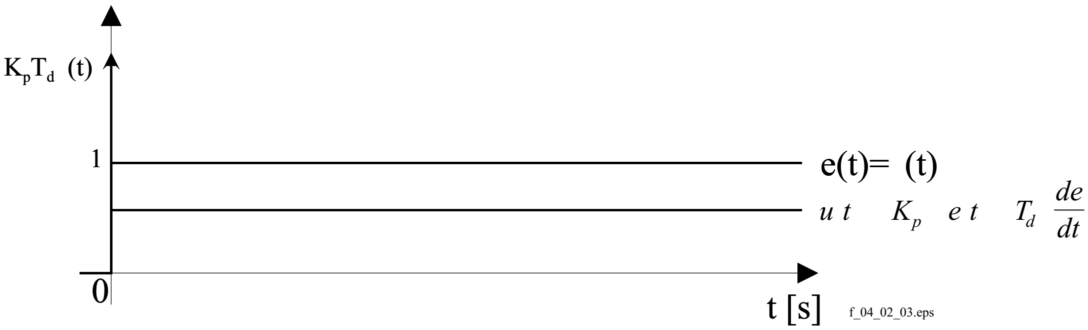


FIG. 4.31 – Réponse indicielle du régulateur PD (fichier source).

– Réponse harmonique du régulateur PD :

$$G_c(j \cdot \omega) = \frac{U(j \cdot \omega)}{E(j \cdot \omega)} = K_p \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot T_d)$$

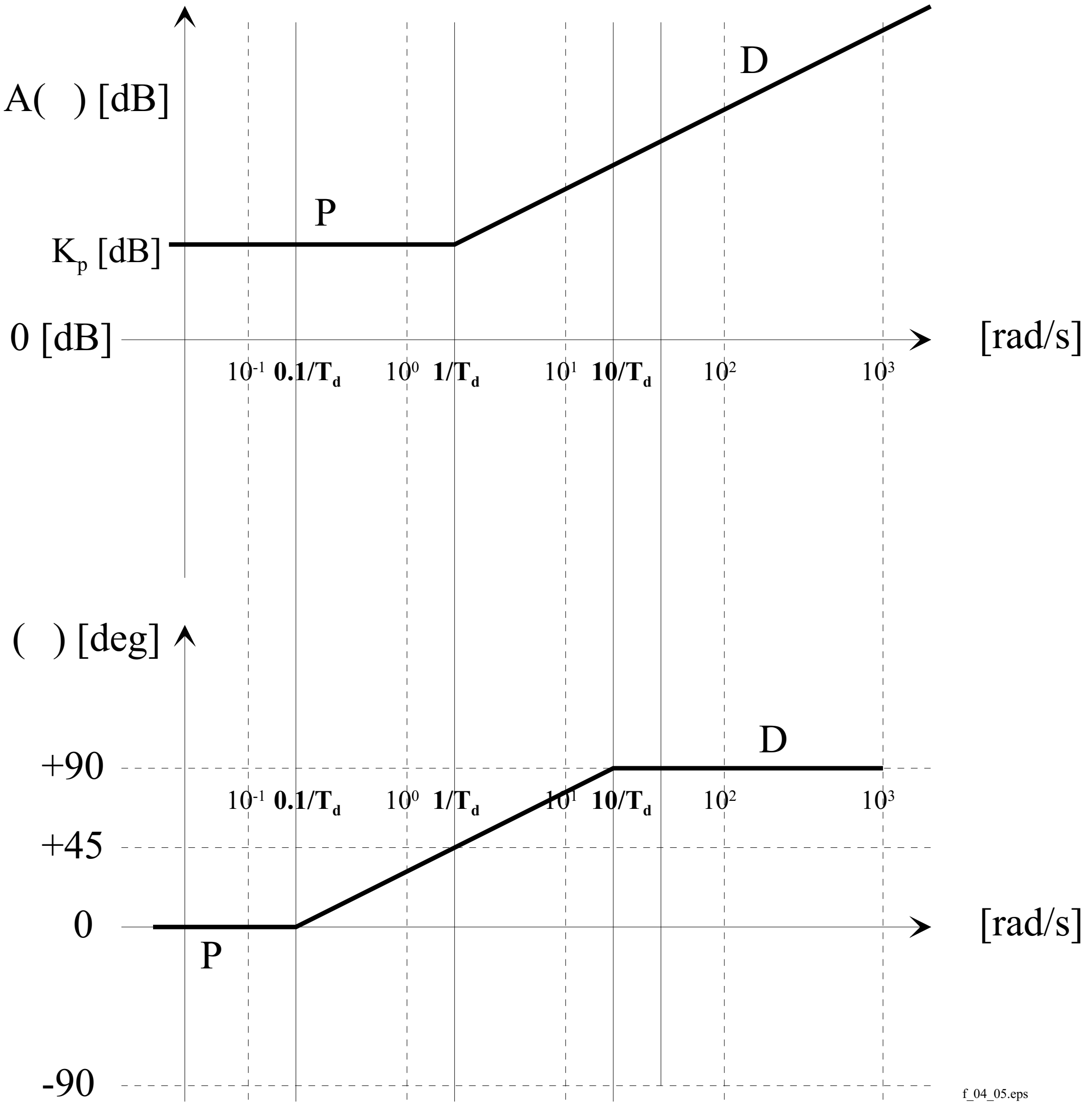


FIG. 4.32 – Réponse harmonique du régulateur PD (fichier source).

Avantages : effet stabilisant et amélioration de la rapidité

L'action D apporte une amélioration notable du comportement dynamique, accélérant la vitesse de réaction du régulateur aux moindres variations de l'erreur. Ainsi, un signal d'erreur, si faible que soit son amplitude, pourra générer une réaction très énergique du régulateur si son taux de croissance $\frac{de}{dt}$ est élevé. L'action D anticipe donc l'évolution de la grandeur réglée $y(t)$ et a tendance à accélérer la propagation des signaux dans la boucle, comme le confirme la réponse harmonique ci-dessus, laquelle montre que les signaux de haute fréquence subissent une avance de phase tendant asymptotiquement vers +90 [°]. On peut d'ores et déjà déduire de cette constatation que l'action D a un effet plutôt favorable sur la stabilité du système asservi : il est donc important de réaliser que **l'action D est plutôt stabilisante et améliore la rapidité des systèmes**.

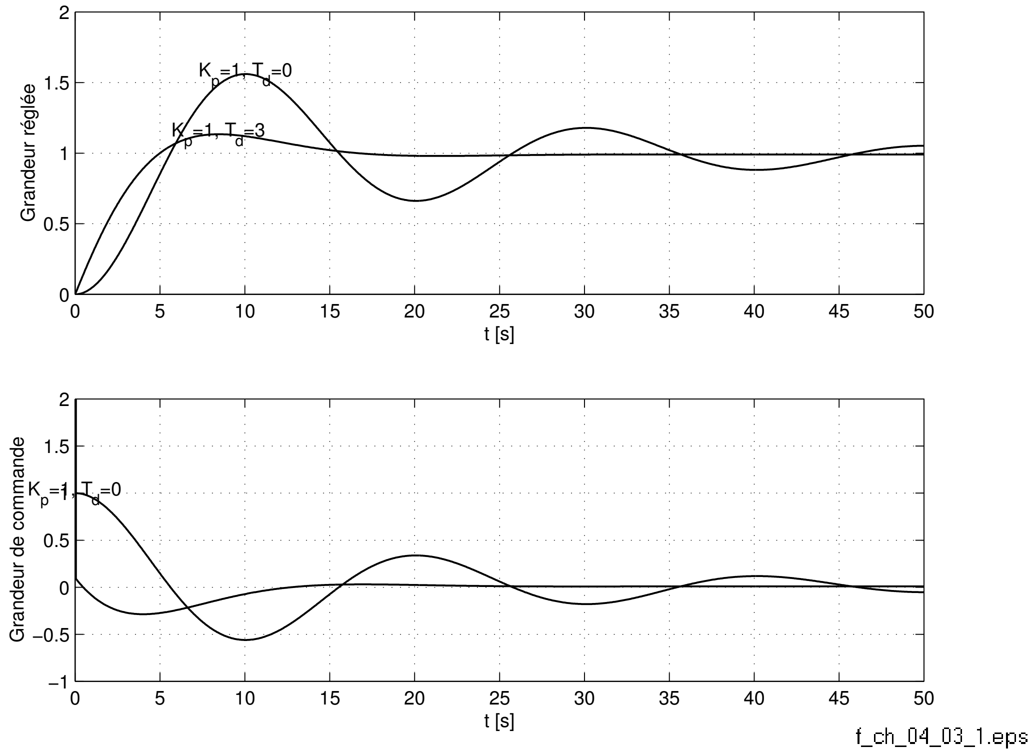


FIG. 4.33 – Réponses indicielles en boucle fermée, pour un même système asservi par un régulateur P puis un régulateur PD. Ce dernier offre, avec la même action proportionnelle ($K_p = 1$ dans les 2 cas) un comportement mieux amorti et tout à la fois plus dynamique (fichier source).

La figure 4.33 compare les réponses indicielles en boucle fermée, régulation de correspondance, avec des régulateurs P et PD de même gain proportionnel $K_p = 1$:

– Système à régler :

$$G_a(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{100}{(1 + s \cdot 10) \cdot (1 + s \cdot 100)}$$

– Régulateur P :

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p = 1$$

– Régulateur PD :

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot (1 + s \cdot T_d) = 1 \cdot (1 + s \cdot 3)$$

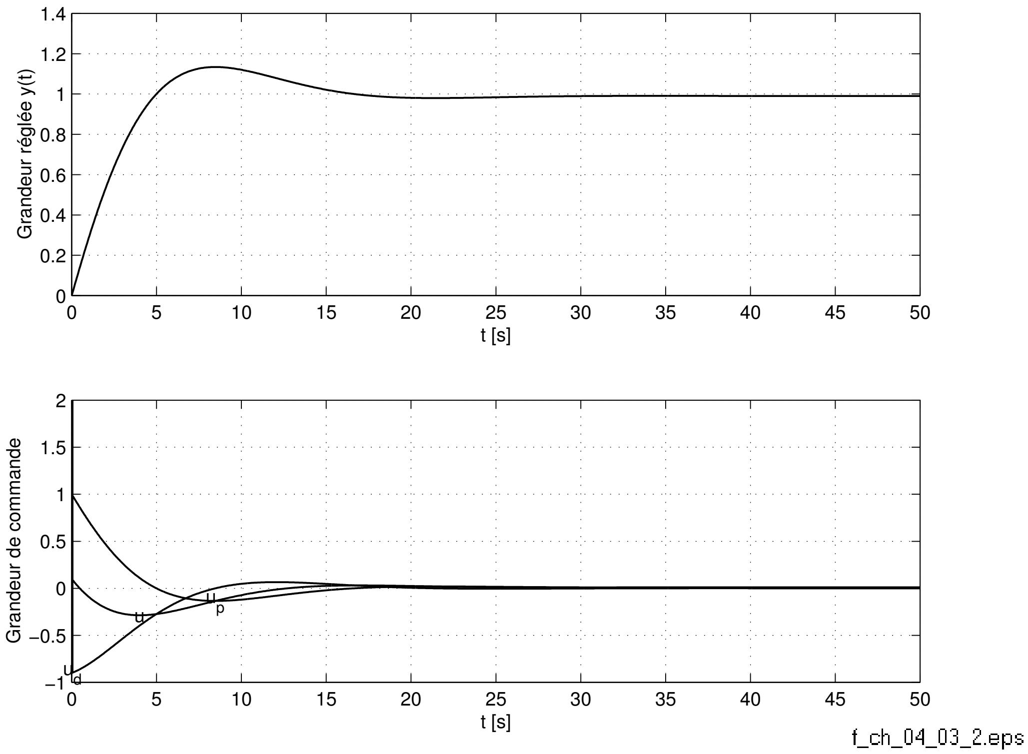


FIG. 4.34 – Réponse indicielle en boucle fermée avec régulateur PD. La décomposition de la commande $u(t)$ en ses contributions proportionnelle ($u_P(t)$) et dérivée ($u_D(t)$) montre bien l'effet d'anticipation ("freinage") de l'action D (fichier source).

Outre le comportement moins oscillatoire du système asservi par un régulateur PD, on remarque que le système est plus rapide. Quant à la commande, on vérifie sur la figure 4.34 page précédente qu'après une impulsion de grande amplitude suivant immédiatement l'application du saut unité de consigne, elle change de signe pour "freiner" le système, l'erreur étant déjà en train de décroître. Elle est par d'ailleurs en avance sur $e(t)$, contrairement à la commande purement proportionnelle.

Des contre-exemples démentant cette affirmation peuvent cependant être trouvés en relevant que si que l'effet d'avance de phase de l'action D est favorable par le fait qu'il facilite la propagation des signaux dans la boucle, cette avance est néanmoins **limitée** à la valeur (certes respectable) de $+90$ [°], alors que le gain continue à croître sans limite apparente au rythme de $+20\ \left[\frac{\text{dB}}{\text{décade}}\right]$. Il est donc plausible de se retrouver dans une situation ou les $+90$ [°] d'avance que subit un signal haute fréquence sont en partie ou totalement compensés par les retards propres au système à régler (par exemple dans le cas d'un système possédant un retard pur) alors que le gain reste à une valeur élevée. Les méthodes d'analyse harmonique étudiées ultérieurement (§ 6.7 page 219) permettront de quantifier précisément cet effet et de s'en prémunir.

Une conséquence directe de l'effet d'anticipation de l'action D est qu'il est a priori plus facile de limiter les dépassements de la réponse indicielle avec un régulateur PD qu'avec un régulateur P ou PI : l'action D apporte une contribution allant diminuant dès le moment où l'erreur décroît, introduisant ainsi un effet de freinage lors de l'approche de la consigne. Dans ce sens, l'action D est une commande particulièrement "intelligente".

Inconvénients : sensibilité aux bruits et précision statique

Un inconvénient majeur de l'action D est à rechercher au niveau de l'effet des bruits $n(t)$ intervenant sur la mesure (figure 4.35 page ci-contre). Le dérivateur amplifie l'effet des bruits et ceci d'autant plus que ceux-ci se situent par nature dans une gamme de fréquences relativement élevées. On a en effet, dans le cas d'un bruit sinusoïdal $n(t) = \hat{N} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ de fréquence f :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\hat{N} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)\right) = \underbrace{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \hat{N}}_{\text{amplitude multipliée par f}} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

En conséquence, la commande $u(t)$ peut être s'avérer inutilisable, malmenant le système à régler et notamment l'actionneur par des à-coups très violents (figure 4.36 page 164). Il s'agit là d'un problème très important auquel on se heurte presque toujours en pratique. Une ébauche de remède sera proposée au paragraphe 4.3.5 page 165.

Un problème lié à la très grande dynamique de la réaction du terme D apparaît également lorsque la consigne varie brutalement : le système à régler ayant

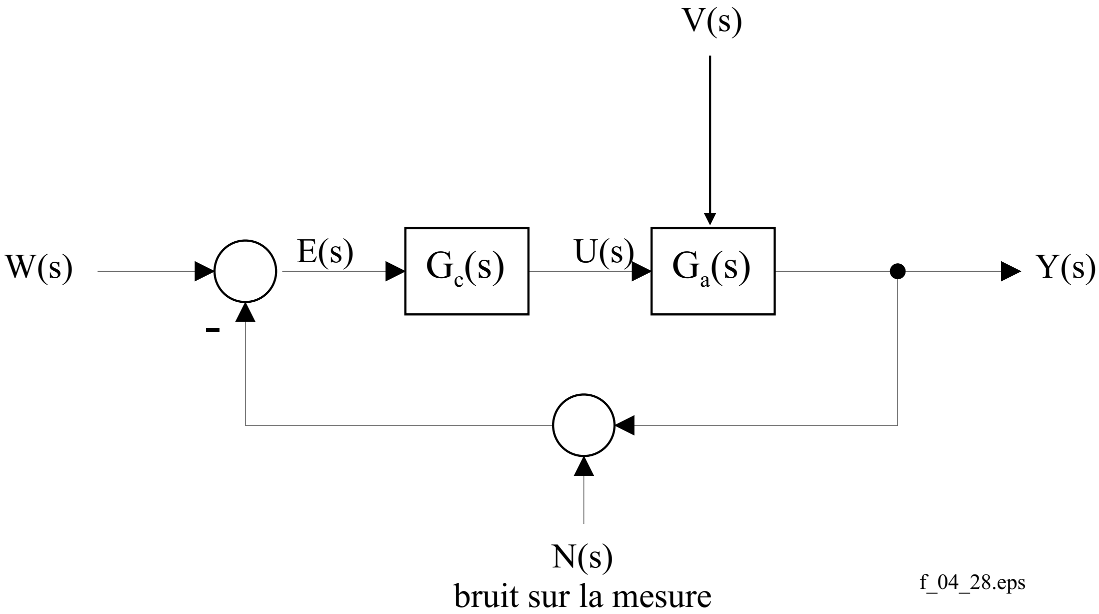


FIG. 4.35 – Prise en compte de la présence bruit $n(t)$ sur la mesure (fichier source).

toujours de l'inertie, i.e. son temps de réaction n'étant pas infiniment court, la variation brutale de la consigne se reflète instantanément sur l'erreur, dont la dérivée peut amener la commande à des valeurs très élevées, comme le montre la réponse indicielle du régulateur PD (figure 4.31 page 158). Pratiquement, l'amplitude de la commande est toujours limitée, ne serait-ce que

– naturellement, car la puissance disponible bien sûr elle aussi limitée, ou encore
– artificiellement à des fins de protection de l'actionneur.

En conséquence, il est très vraisemblable qu'à la suite d'une variation trop rapide de la consigne, une saturation de la commande $u(t)$ intervienne, faisant ainsi travailler le système en régime non-linéaire. Outre le fait qu'une telle situation est anormale et ne devrait pas se prolonger, cela signifie que le modèle du système à régler ne correspond plus à celui adopté. L'analyse et la prédiction de comportement, si elle reste possible, devient néanmoins plus difficile. En pratique, on évite donc d'exciter un système asservi avec des signaux à flancs abrupts comme le saut unité en est un exemple. Ce dernier est et reste donc plutôt un signal d'analyse réservé à l'identification de la fonction de transfert $G_a(s)$ du système à régler ou plus simplement aux études théoriques. Une alternative consiste à filtrer la consigne afin de limiter ses variations (figure 4.38 page 165).

D'autre part, si l'action D est particulièrement bénéfique en régime transitoire, lorsque la consigne et/ou la grandeur réglée évoluent, offrant une meilleure précision dynamique, il n'en va pas de même en régime permanent où la contri-

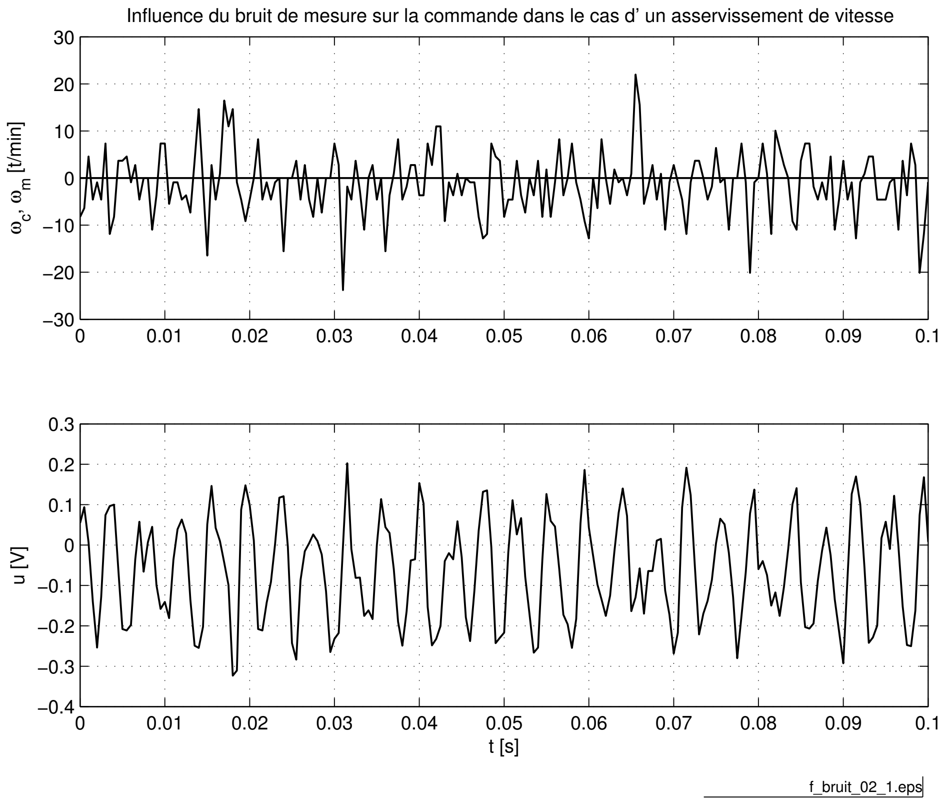


FIG. 4.36 – Influence du bruit de mesure d'un asservissement de vitesse. Bien que la consigne de vitesse ω_c soit à zéro, la vitesse mesurée ω_m s'en écarte continuellement, le régulateur réagissant au bruit de mesure (fichier source).

bution dérivée est d'autant plus faible que l'erreur varie peu : **elle est même nulle lorsque l'erreur est constante !** De ce fait, il est exclu, dans le contexte d'un système asservi, de mettre en oeuvre un régulateur à action D seule. Un tel régulateur serait très efficace en régime dynamique mais s'avérerait bien sûr totalement inopérant en régime permanent constant, incapable de réagir dans le cas pourtant le plus facile, i.e. celui ou l'erreur est constante. Pour l'exemple de la régulation de vitesse de moteur DC précédemment étudié, cela signifie qu'une erreur de vitesse constante ne générerait aucune tension aux bornes de l'induit : $u_a(t) = 0\,[\mathrm{V}]$!

L'action D n'améliore donc pas directement la précision en régime permanent, cette tâche étant à la charge de l'action P voire de l'action I si un régulateur comprenant les trois types d'actions P, I et D est mis en oeuvre. **En conséquence, on notera que l'action D ne permettant pas la transmission d'un signal constant, elle doit donc toujours s'accompagner au moins d'une action P en parallèle (régulateur PD)**.

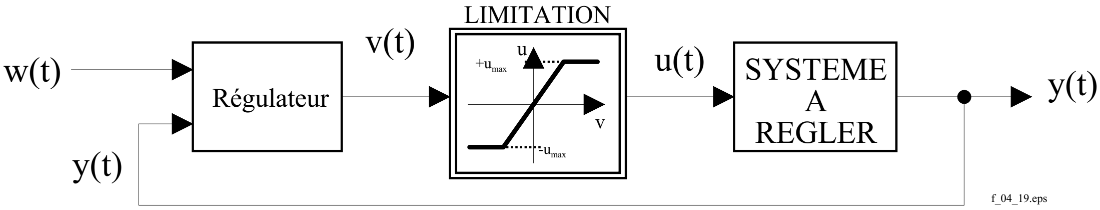


FIG. 4.37 – Limitation volontaire (et nécessaire en pratique) de la grandeur de commande, à des fins de protection du système à régler (fichier source).

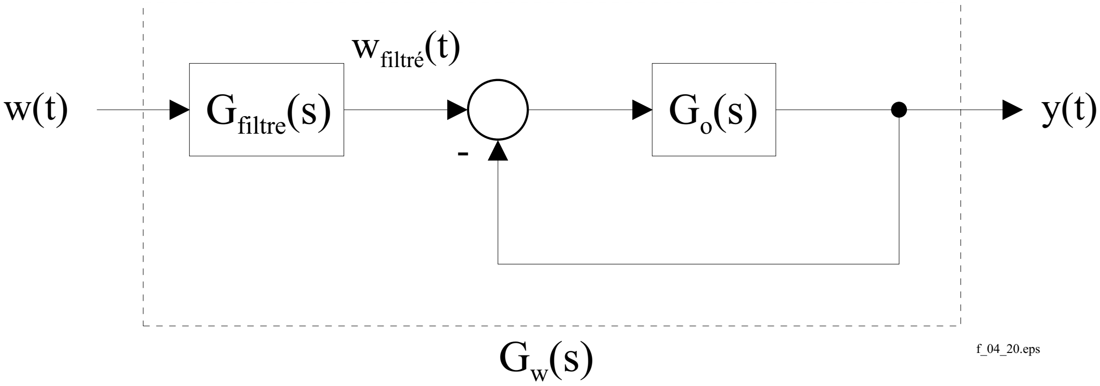


FIG. 4.38 – Filtrage de la consigne afin d'éviter les saturations de la commande (fichier source).

Toutefois, par le fait que l'action D est plutôt stabilisante, le gain de l'action P peut parfois être ajusté à une valeur plus élevée en minimisant le risque d'instabilité : la précision en régime permanent peut être ainsi améliorée indirectement par l'action dérivée.

Régulateur PD réalisable

L'opérateur "$\frac{d}{dt}$" ou "s" effectuant la dérivée du signal d'erreur (figure 4.30 page 158) n'est pas réalisable physiquement ; en effet, l'examen de son diagramme de Bode (figure 4.32 page 159) montre que son gain $A(\omega)$ tend vers l'infini en même temps que la fréquence du signal. La puissance de celui-ci est alors, dans le cas d'un signal sinusoïdal d'amplitude unitaire :

$$p\left(t\right) = \left(\frac{d}{dt}e\left(t\right)\right)^2 = \left(\frac{d}{dt}\sin\left(\omega\cdot t\right)\right)^2 = \omega^2\cdot\cos^2\left(\omega\cdot t\right)$$

$$\lim_{\omega\to\infty} p(t) = \infty$$

Cette puissance tend vers l'infini lorsque ω en fait autant, ce qui rend caduque la réalisation d'un dérivateur pur. Il faut donc s'attendre à ce qu'à partir d'une certaine fréquence, le gain $A(\omega)$ du dérivateur réel cesse d'augmenter au rythme de 20 $\left[\frac{\mathsf{dB}}{\mathsf{œcade}}\right]$ et se stabilise à une valeur constante avant même de décroître. Les fréquences caractéristiques correspondantes sont liées aux imperfections inévitables de la réalisation, telle que par exemple la bande passante finie des amplificateurs opérationnels, les capacités parasites des étages amplificateurs ou plus simplement des résistances, tout autant d'éléments qui provoquent une atténuation du gain à partir d'une fréquence plus ou moins élevée.

En pratique, les conséquences sont négligeables, eu égard à la gamme des fréquences auxquelles ces phénomènes parasites interviennent. Qui plus est, on souhaitera même dans certains cas amplifier leur effet en complétant délibérément l'action D par un filtrage passe-bas de pulsation caractéristique $\frac{1}{a \cdot T_d}$ nettement plus basse. La raison à cela est d'ordre essentiellement pratique : on souhaite par ce moyen atténuer l'effet des bruits. Aussi le régulateur PD réalisé a-t-il souvent pour fonction de transfert :

$$\begin{aligned} G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} &= K_p \cdot \left(1 + \frac{s \cdot T_d}{1 + s \cdot a \cdot T_d}\right) \\ &= K_p \cdot \frac{1 + s \cdot (1+a) \cdot T_d}{1 + s \cdot a \cdot T_d} \end{aligned}$$

où a est un coefficient ajustable nommé *facteur d'avance de phase* valant en général 0.1 à 0.2.

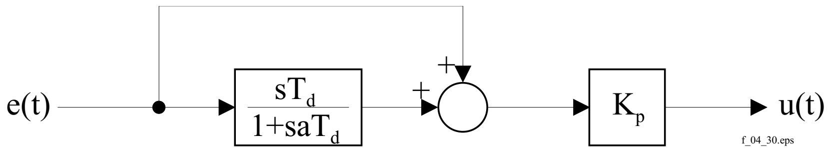


FIG. 4.39 – Schéma fonctionnel d'un régulateur PD réalisable (fichier source).

Ce régulateur est parfois appelé régulateur à avance de phase, en raison de l'avance provisoire qu'il apporte à la phase, comme le montre sa réponse harmonique (figure 4.40 page suivante). Le calcul et le tracé de la réponse indicielle de ce régulateur sont faits en exercice.

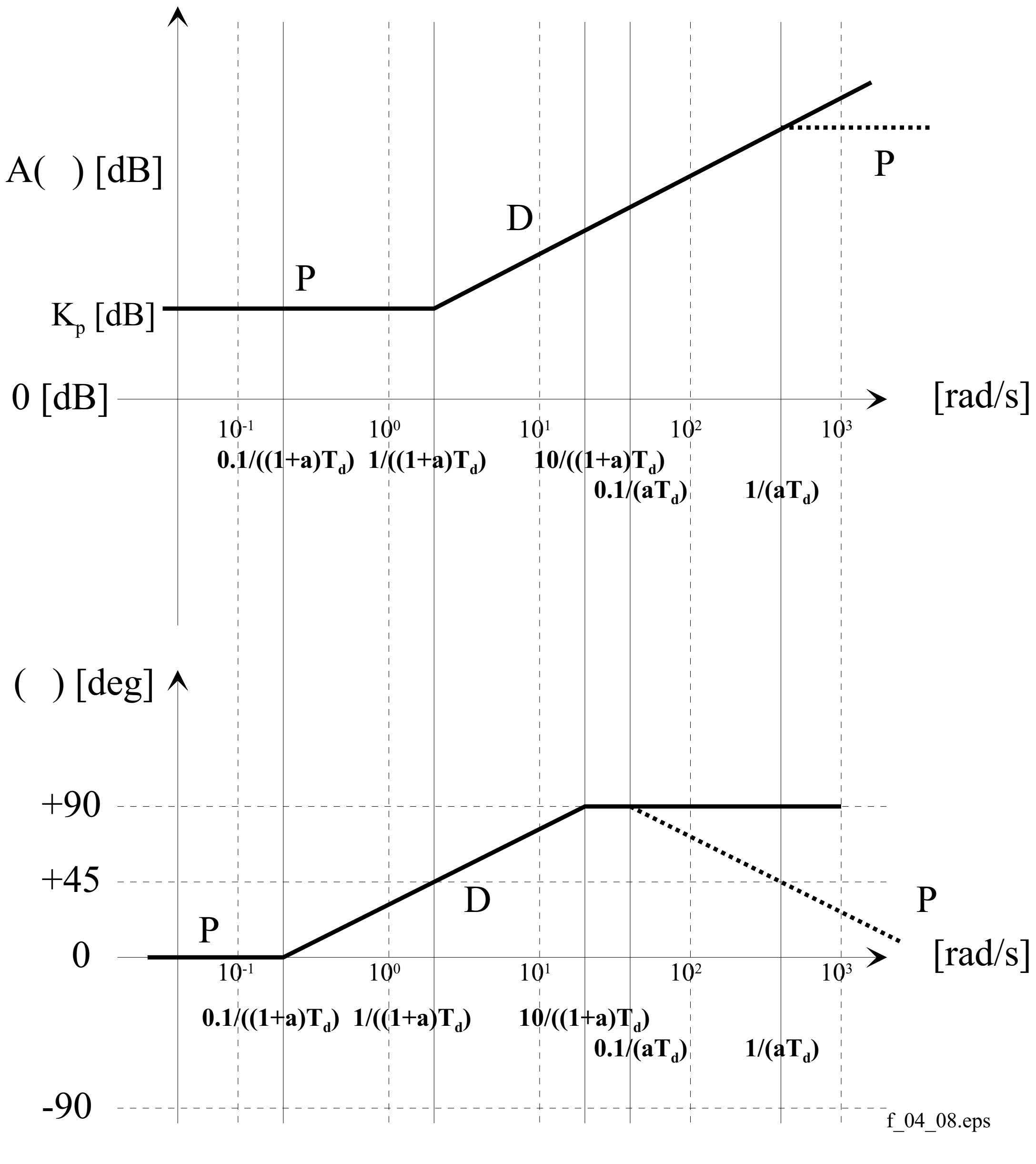


Fig. 4.40 – Réponse harmonique d'un régulateur PD réalisable (fichier source).

4.3.6 Régulateur industriel PID

Le régulateur PID, i.e. Proportionnel-Intégral-Dérivée, est la combinaison des trois actions de base P, I et D. Grâce au terme I, il permet l'annulation d'une erreur statique tout en autorisant grâce à l'action D des performances de rapidité supérieures à celles d'un régulateur PI.

– Loi de commande du régulateur PID :

$$\boxed{u(t) = K_p \cdot \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_{-\infty}^{t} e(\tau) \cdot d\tau + T_d \cdot \frac{de}{dt} \right)}$$

– Fonction de transfert du régulateur PID :

$$\boxed{G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot \frac{1 + s \cdot T_i + s^2 \cdot T_i \cdot T_d}{s \cdot T_i}}$$

– Schéma fonctionnel du régulateur PID :

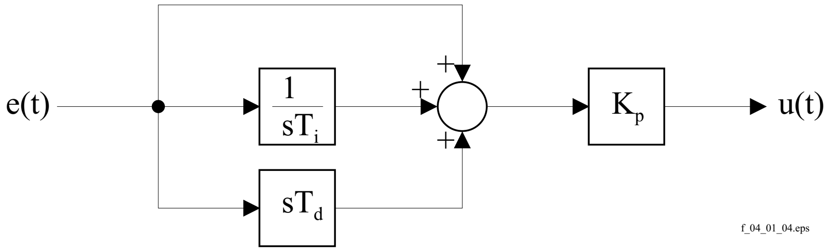


Fig. 4.41 – Schéma fonctionnel du régulateur PID (fichier source).

– Réponse indicielle du régulateur PID :

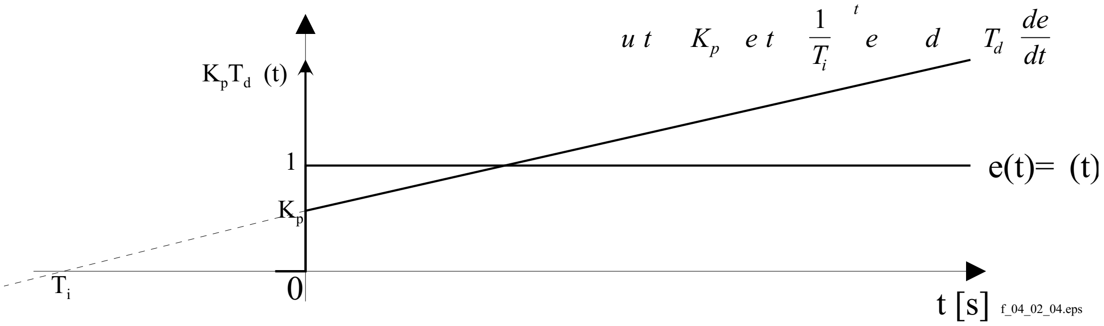


Fig. 4.42 – Réponse indicielle du régulateur PID (fichier source).

– Réponse harmonique du régulateur PID :

$$G_c(j \cdot \omega) = \frac{U(j \cdot \omega)}{E(j \cdot \omega)} = K_p \cdot \frac{1 + j \cdot \omega \cdot T_i + (j \cdot \omega)^2 \cdot T_i \cdot T_d}{j \cdot \omega \cdot T_i}$$

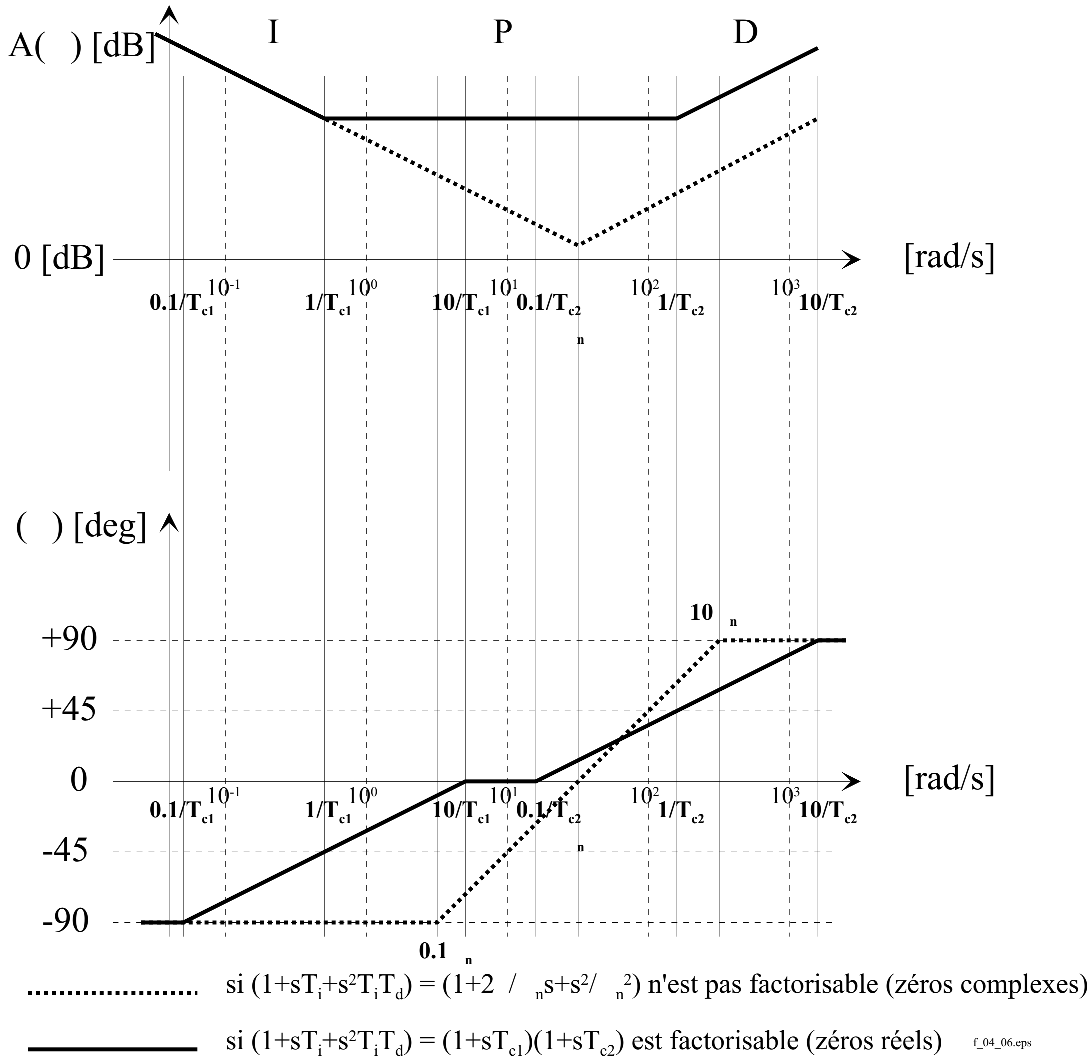


FIG. 4.43 – Réponse harmonique du régulateur PID (fichier source).

Pour établir les fonctions de transfert des régulateurs PD et PID, on a supposé que le dérivateur pur était réalisable. Ceci explique pourquoi les expressions de $G_c(s)$ obtenues

$$G_c\left(s\right)|_{PID} = \frac{U\left(s\right)}{E\left(s\right)} = K_p \cdot \frac{1 + s \cdot T_i + s^2 \cdot T_i \cdot T_d}{s \cdot T_i}$$

$$G_c(s)|_{PD} = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot (1 + s \cdot T_d)$$

possèdent plus de zéros que de pôles, i.e. ont un degré relatif d (§ 2.5.3 page 83) tel que $d = n - m < 0$. Cette supposition se justifie pour autant que les phénomènes parasites qui interdisent la construction d'un dérivateur pur interviennent à des fréquences nettement supérieures à la zone de travail du régulateur, ce qui est en principe le cas. On peut donc souvent les prendre telles quelles pour les tracés de réponses indicielles ou harmoniques.

En réalité, tout système physiquement réalisable possède plus de pôles que de zéros ($d = n - m > 0$), ce qui se traduit concrètement par le fait que le gain de tout système finit par décroître et déphaser les signaux lorsque la fréquence est suffisamment élevée. Notons que cette affirmation rend également impossible la réalisation d'un gain pur ($d = n - m = 0$) !

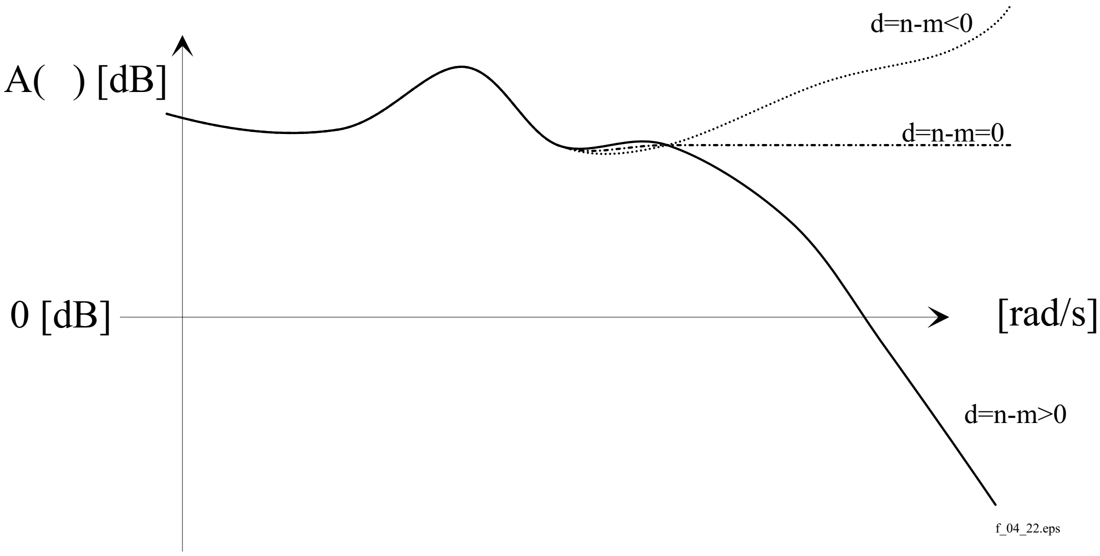


FIG. 4.44 – Allures générales des gains de systèmes à degré relatif $d = n - m < 0$, $d = n - m = 0$ et $d = n - m > 0$. Seul ce dernier est physiquement réalisable (fichier source).

Le calcul suivant montre cela pour un système dynamique linéaire d'ordre n, ayant m zéros et de type α (i.e. ayant α pôles en $s = 0\,[\mathrm{s}^{-1}]$) :

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K}{s^{\alpha}} \cdot \frac{1 + s \cdot b_1 + \ldots + s^{m-1} \cdot b_{m-1} + s^m \cdot b_m}{1 + s \cdot a_1 + \ldots + s^{n-\alpha-1} \cdot a_{n-\alpha-1} + s^{n-\alpha} \cdot a_{n-\alpha}}$$

$$G(j \cdot \omega) = \frac{K}{(j \cdot \omega)^{\alpha}} \cdot \frac{1 + (j \cdot \omega) \cdot b_1 + \ldots + (j \cdot \omega)^{m-1} \cdot b_{m-1} + (j \cdot \omega)^m \cdot b_m}{1 + (j \cdot \omega) \cdot a_1 + \ldots + (j \cdot \omega)^{n-\alpha-1} \cdot a_{n-\alpha-1} + (j \cdot \omega)^{n-\alpha} \cdot a_{n-\alpha}}$$

$$\lim_{\omega \to \infty} G(j \cdot \omega) = \frac{K \cdot \frac{b_m}{a_{n-\alpha}}}{(j \cdot \omega)^{n-m}} \Longrightarrow \begin{cases} A(\omega) = |G(j \cdot \omega)|\big|_{\omega \to \infty} \to \frac{K \cdot \frac{b_m}{a_{n-\alpha}}}{\omega^{n-m}} \\ \varphi(\omega) = \arg\{G(j \cdot \omega)\}\big|_{\omega \to \infty} \to (n - m) \cdot (-90\ [°]) \end{cases}$$

4.3.7 "Hit parade" des régulateurs classiques

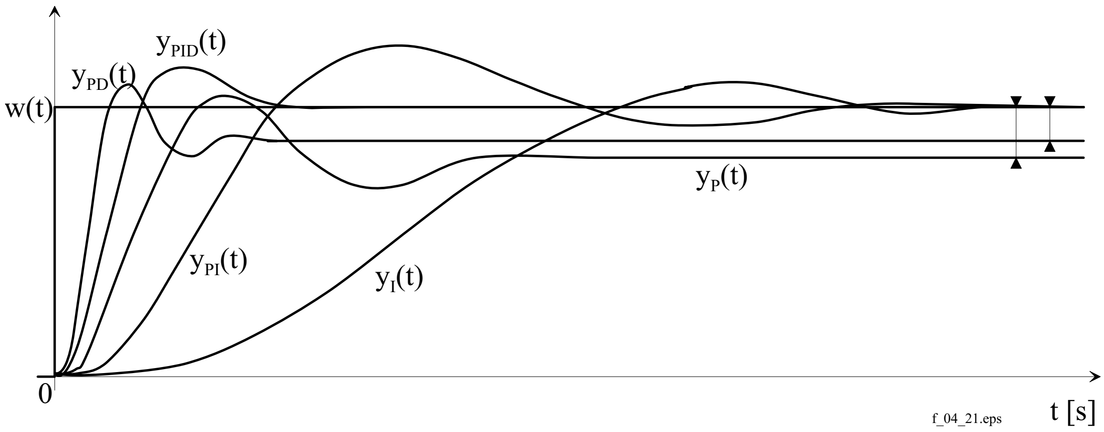


FIG. 4.45 – "Hit parade" des régulateurs classiques (fichier source).

Action	Avantage	Désavantage
P	dynamique	ne permet pas d'annuler une erreur statique
I	annulation d'erreur statique, amélioration de la robustesse	action lente, ralentit le système (effet déstabilisant)
D	action très dynamique, améliore la rapidité (effet stabilisant)	sensibilité aux bruits forte sollicitation de l'organe de commande

TAB. 4.1 – Résumé des effets respectifs des actions P, I, et D.

4.4 Méthodes empiriques de synthèse (selon [1])

En 1942, Ziegler et Nichols ont proposé deux approches expérimentales destinées à ajuster rapidement les paramètres des régulateurs P, PI et PID. La première nécessite l'enregistrement de la réponse indicielle du système à régler seul ($G_a(s)$), alors que la deuxième demande d'amener le système en boucle fermée à sa limite de stabilité.

Il est important de souligner que ces méthodes ne s'appliquent en général qu'à des systèmes sans comportement oscillant et dont le déphasage en hautes fréquences dépasse -180 [°]. Ces systèmes possèdent souvent un retard pur et/ou plusieurs constantes de temps. On les rencontre surtout dans les processus physico-chimiques tels que les régulation de température, de niveau, de pression, etc.

4.4.1 Méthode de Ziegler-Nichols en boucle ouverte (première méthode de Ziegler-Nichols)

Sur l'enregistrement de la réponse indicielle (figure 4.46) du seul système à régler (c'est-à-dire sans le régulateur), on trace la tangente au point d'inflexion Q de la courbe. On mesure ensuite les temps T_u correspondant au point d'intersection entre l'abscisse et la tangente ainsi que le temps T_g ("temps de montée de la tangente").

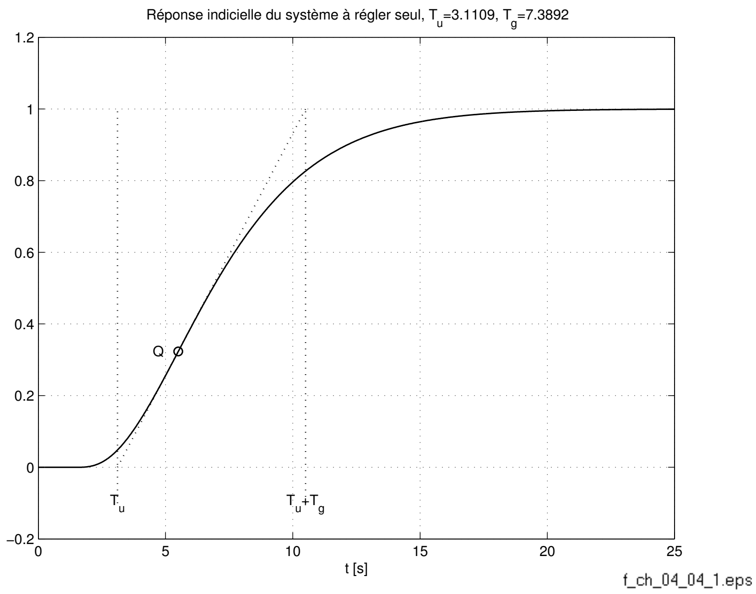


FIG. 4.46 – Réponse indicielle du système à régler seul : on mesure les temps T_u et T_g (fichier source).

On peut alors calculer les coefficients du régulateur choisi à l'aide du tableau 4.4.1.

Type	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T_g}{T_u}$	-	-
PI	$0.9 \cdot \frac{T_g}{T_u}$	$3.3 \cdot T_u$	-
PID	$1.2 \cdot \frac{T_g}{T_u}$	$2.0 \cdot T_u$	$0.5 \cdot T_u$

TAB. 4.2 – Ajustage des gains de régulateurs P, PI et PID selon la première méthode de Ziegler-Nichols.

Généralement les gains proportionnels (K_p) proposés par Ziegler-Nichols sont trop élevés et conduisent à un dépassement supérieur à 20%. Il ne faut donc pas craindre de réduire ces gains d'un facteur 2 pour obtenir une réponse satisfaisante. Une illustration de cette démarche est donnée ci-dessous.

Exemple

Considérant la réponse indicielle d'un système apériodique (figure 4.46 page précédente), on peut y mesurer :
- $T_g = 7.4$ [s]
- $T_u = 3.1$ [s]

Du tableau de Ziegler-Nichols, on tire les trois paramètres du régulateur
- $K_p = 1.2 \cdot \frac{T_g}{T_u} = 2.8$, réduit de 50%, ce qui donne $K_p = 1.4$
- $T_i = 2.0 \cdot T_u = 6.2$ [s]
- $T_d = 0.5 \cdot T_u = 1.55$ [s]

La division par 2 de la valeur du gain proportionnel permet d'obtenir une réponse indicielle tout à fait satisfaisante (deuxième graphe, figure 4.47 page suivante).

4.4.2 Méthode de Ziegler-Nichols en boucle fermée (seconde méthode de Ziegler-Nichols)

Cette méthode nécessite de boucler le système sur un simple régulateur proportionnel dont on augmente le gain jusqu'à amener le système à osciller de manière permanente (figure 4.48 page 175) ; on se trouve ainsi à la limite de stabilité du système. Après avoir relevé le gain critique K_{cr} et la période d'oscillation T_{cr} de la réponse, on peut calculer les paramètres du régulateur choisi à l'aide du tableau 4.4.2 page suivante.

Les valeurs proposées par Ziegler et Nichols ont été testées dans de très nombreuses situations et il faut souligner qu'ici également elles conduisent à un temps de montée relativement court assorti d'un dépassement élevé.

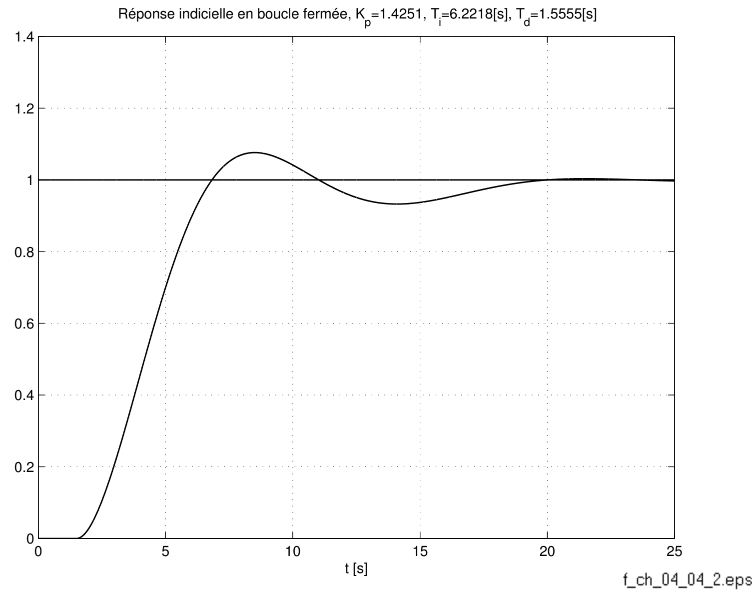


FIG. 4.47 – Réponse indicielle en boucle fermée, régulateur PID ajusté selon la première méthode de Ziegler Nichols (fichier source).

Type	K_p	T_i	T_d
P	$0.5 \cdot K_{cr}$	-	-
PI	$0.45 \cdot K_{cr}$	$0.83 \cdot T_{cr}$	-
PID	$0.6 \cdot K_{cr}$	$0.5 \cdot T_{cr}$	$0.125 \cdot T_{cr}$

TAB. 4.3 – Ajustage des gains de régulateurs P, PI et PID selon la seconde méthode de Ziegler-Nichols.

Cette situation n'étant pas toujours satisfaisante, on est amené à corriger légèrement les coefficients proposés et, en particulier, à diminuer le gain K_p. Une modification possible est proposée par le tableau 4.4.2 page suivante. Il est important de remarquer que les paramètres T_i et T_d proposés dans les 2 méthodes de Ziegler-Nichols ont été fixés dans un rapport constant égal à 4. Cela conduit, pour le régulateur, à 2 zéros confondus en

$$-\frac{1}{2 \cdot T_d} = -\frac{2}{T_i}$$

4.4.3 Auto-ajustement d'un régulateur PID

Une expérience telle que celle proposée au §4.4.2 n'est généralement pas admise en milieu industriel car la maîtrise de l'amplitude des oscillations est délicate

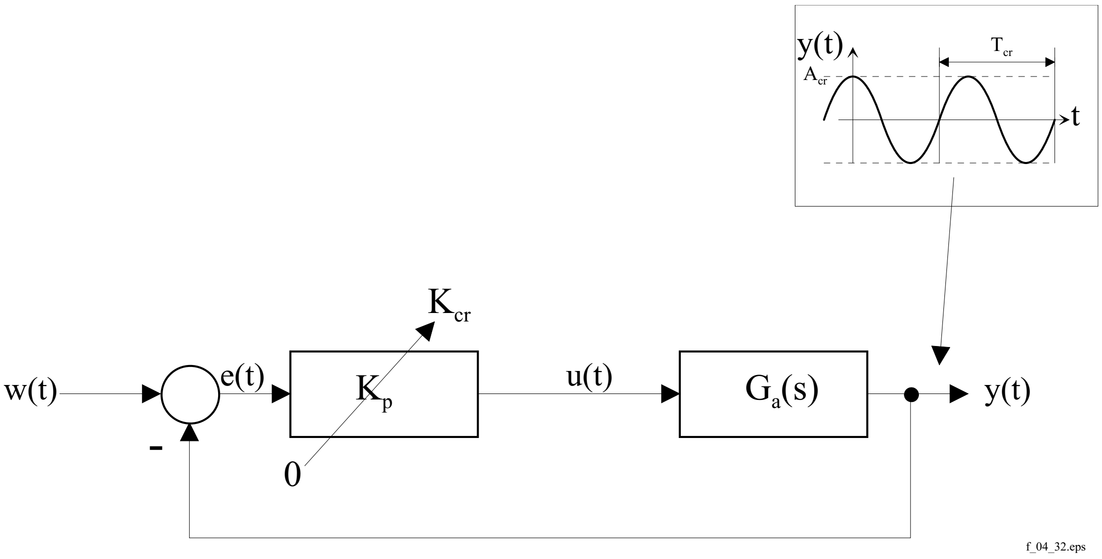


FIG. 4.48 – Mise en oscillation d'un système par contre-réaction (fichier source).

Type	K_p	T_i	T_d
P	$0.4 \cdot K_{cr}$	-	-
PI	$0.4 \cdot K_{cr}$	$0.4 \cdot T_{cr}$	-
PID	$0.4 \cdot K_{cr}$	$0.4 \cdot T_{cr}$	$0.1 \cdot T_{cr}$

TAB. 4.4 – Ajustage modifié des gains de régulateurs P, PI et PID selon la seconde méthode de Ziegler-Nichols.

et le risque d'une perte de stabilité est trop grand. Afin de contourner ce problème, on préfère créer les oscillations entretenues à l'aide d'un régulateur tout-ou-rien, tout en limitant l'amplitude du signal de commande $u(t)$ à $\pm A$. Ainsi, l'oscillation de la grandeur réglée $y(t)$ sera également limitée (figure 4.49 page suivante). On notera qu'en régime permanent, le signal de commande $u(t)$ est un signal carré d'amplitude A et que la grandeur réglée $y(t)$ est périodique d'amplitude A_{cr}, mais non purement sinusoïdal. Considérant, dans une première approximation, que cette amplitude n'est pas très éloignée de celle du premier harmonique $Y^1 \approx A_{cr}$ de $y(t)$ (on rappelle que le système à régler $G_a(s)$ est typiquement de nature filtre passe-bas) et sachant que celle du signal carré $u(t)$ vaut $U^1 = 4 \cdot \frac{A}{\pi}$, on détermine le gain du système pour cette fréquence en effectuant le rapport $\frac{Y^1}{U^1}$ des harmoniques d'ordre 1.

Le système bouclé étant en oscillation entretenue à la pulsation ω_{cr}, son gain de boucle en cette pulsation

$$G_o(j \cdot \omega_{cr}) = K_{pcr} \cdot G_a(j \cdot \omega_{cr}) = K_{pcr} \cdot \frac{Y^1}{U^1} = -1$$

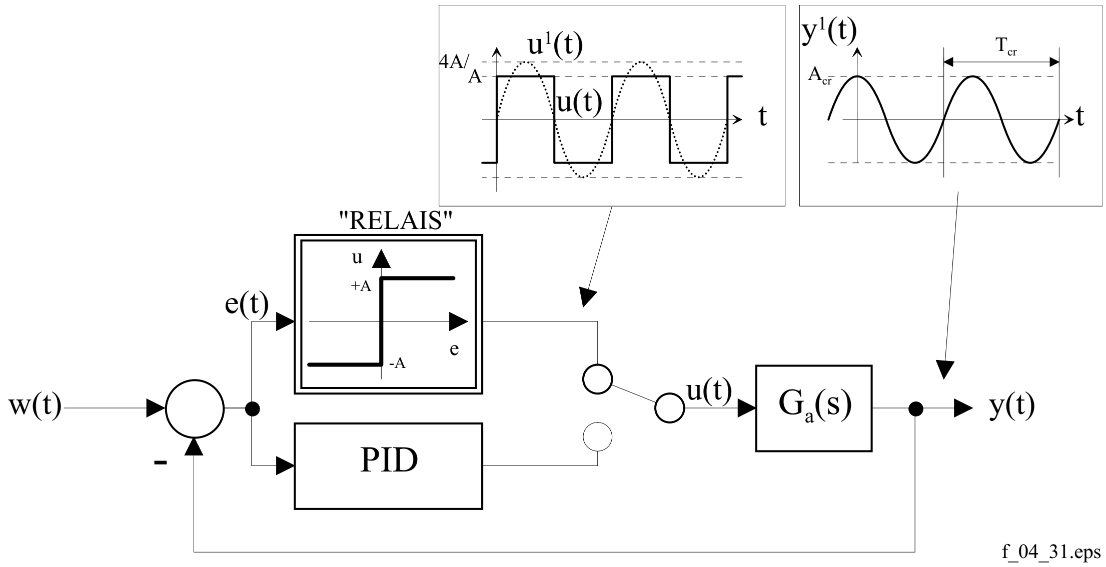


FIG. 4.49 – Mise en oscillation contrôlée d'un système asservi au moyen d'un élément non-linéaire (caractéristique de relais) (fichier source).

est dès lors -1 (§ 1.5.3 page 33) ; si le gain du système à régler à la fréquence d'oscillation est $\frac{Y^1}{U^1}$, son inverse n'est autre que le gain critique $K_p = K_{cr}$ qu'il faut placer dans le régulateur pour transformer l'ensemble en un système oscillant de manière permanente. On se trouve alors dans la situation décrite par Ziegler-Nichols dans la méthode en boucle fermée. Alors :

$$\boxed{K_{cr} = \frac{1}{|G_a(j \cdot \omega_{cr})|} = \left(\frac{Y^1}{U^1}\right)^{-1} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{A}{A_{cr}}}$$

En s'aidant du tableau de Ziegler-Nichols, on a ainsi la possibilité d'obtenir expérimentalement et automatiquement les paramètres d'un régulateur PID.

Il est intéressant de souligner que cette méthode ne nécessite aucune connaissance préalable de l'installation à régler. Il suffit de lancer l'installation avec le régulateur tout-ou-rien puis, une fois les paramètres trouvés, de le commuter en régulation automatique. Cette approche, dénommée méthode du relais, a été proposée en 1984 par Äström et Hägglünd de l'université de Lund en Suède.

Exemple

Une illustration de ces possibilités est donnée ci-dessous avec un système possédant 3 constantes de temps et un retard pur dont la fonction de transfert vaut :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-s \cdot 1.5}}{(1 + s \cdot 2)^3}$$

Pour ce système, la méthode du relais nous donne une période T_{cr} de 12.6 [s] et

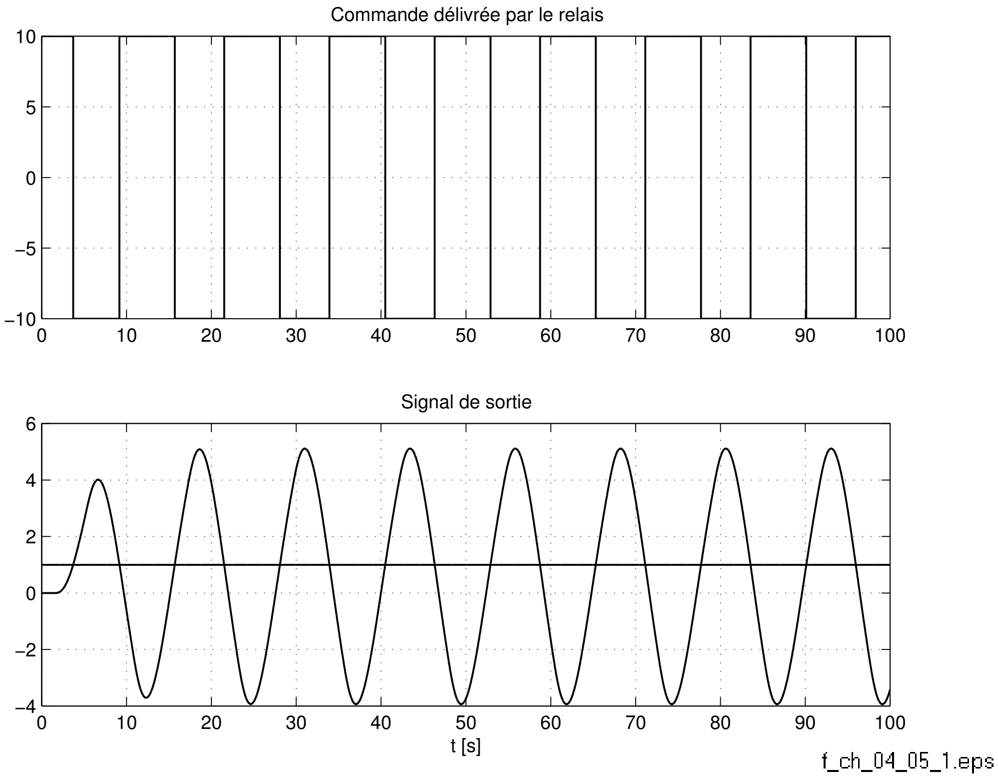


Fig. 4.50 – Méthode du relais : on mesure la période d'oscillation T_{cr} et son amplitude A_{cr} (fichier source).

un gain critique K_{cr}

$$K_{cr} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{A}{A_{cr}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{10}{5} = 2.55$$

A partir de là et du tableau de Ziegler-Nichols modifié (tab. 4.4.2 page 175), on en tire :

- $K_p = 0.4 \cdot K_{cr} = 1.1[-]$
- $T_i = 0.4 \cdot T_{cr} = 5.0\,[\mathrm{s}]$
- $T_d = 0.1 \cdot T_{cr} = 1.26\,[\mathrm{s}]$

L'introduction de ces paramètres dans le régulateur conduit à la réponse indicielle en boucle fermée illustrée sur la figure 4.50. Cette réponse est pratiquement optimale et est donc tout à fait satisfaisante. Il est intéressant de comparer les réponses indicielles obtenues par les 2 méthodes de Ziegler-Nichols (figures 4.47 page 174 et 4.51 page suivante). Dans les 2 cas, le système était le même et on peut constater que les résultats sont assez proches malgré des paramètres PID légèrement différents.

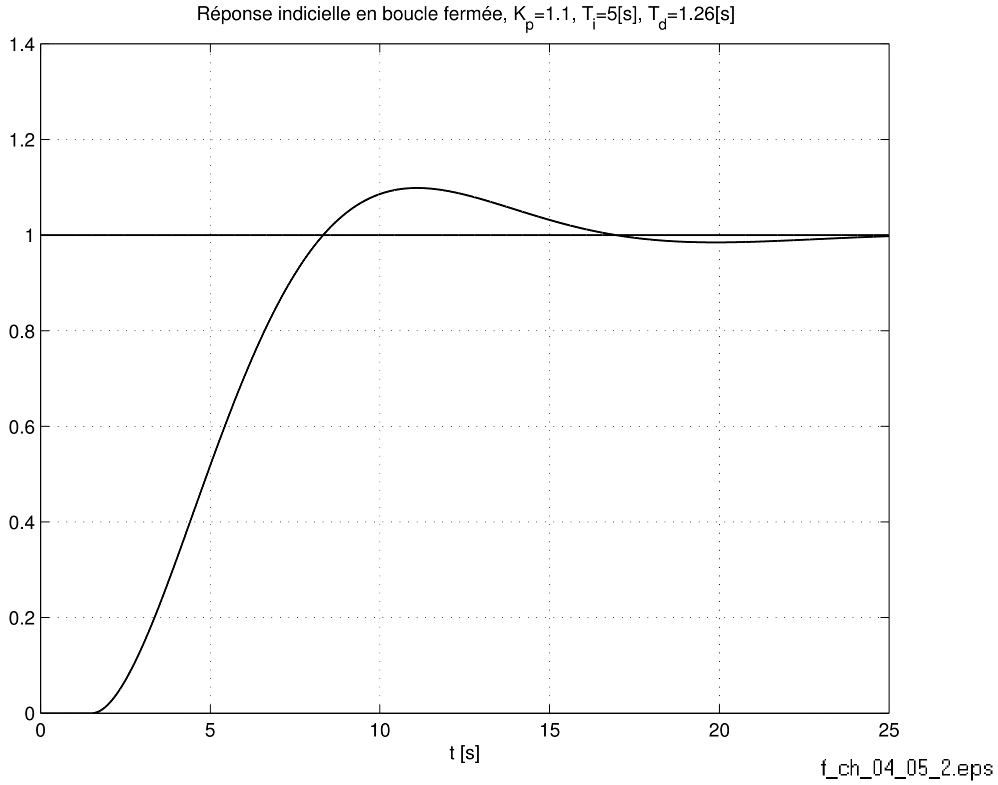


FIG. 4.51 – Réponse indicielle en boucle fermée, régulateur PID ajusté selon la seconde méthode de Ziegler Nichols, avec l'aide de la technique du relais (fichier source).

Enfin, il est important d'insister sur le fait que la méthode de Ziegler-Nichols en boucle fermée fonctionne relativement bien pour des systèmes sans comportement oscillant et dont le déphasage en hautes fréquences franchit les -180 [°] et qu'elle n'est pas applicable dans d'autres situations.

Chapitre 5

Performances des systèmes asservis

5.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'étude des performances des systèmes asservis. Pour évaluer et comparer des systèmes asservis, on peut se baser sur les 4 critères suivants :

- leur stabilité (notamment le degré de stabilité) (§ 5.2) ;
- leur précision (notamment en régime permament) (§ 5.3 page 187) ;
- leur rapidité (§ 5.4 page 193) ;
- la qualité de l'asservissement (§ 5.5 page 197).

L'étude de ces 4 critères de comparaison constitue l'essentiel du présent chapitre. La notion de retard pur est définie au § 5.4.3 page 196 alors qu'un dernier paragraphe traite des systèmes dynamiques à pôles dominants (§ 5.6 page 198).

5.2 Stabilité

5.2.1 Définition

Dans le cadre de ce cours de base, on adopte la définition suivante pour la stabilité :

Un système dynamique linéaire est stable si, et seulement si, écarté de sa position d'équilibre par une sollicitation extérieure, le système revient à cette position d'équilibre lorsque la sollicitation a cessé.

La stabilité en boucle fermée d'un système de régulation automatique est une condition impérative. Pour que les systèmes soient utilisables en asservissement, il est en effet absolument nécessaire que toutes les fonctions de transfert en boucle fermée (BF), par exemple $G_w(s)$ (régulation de correspondance) et $G_v(s)$

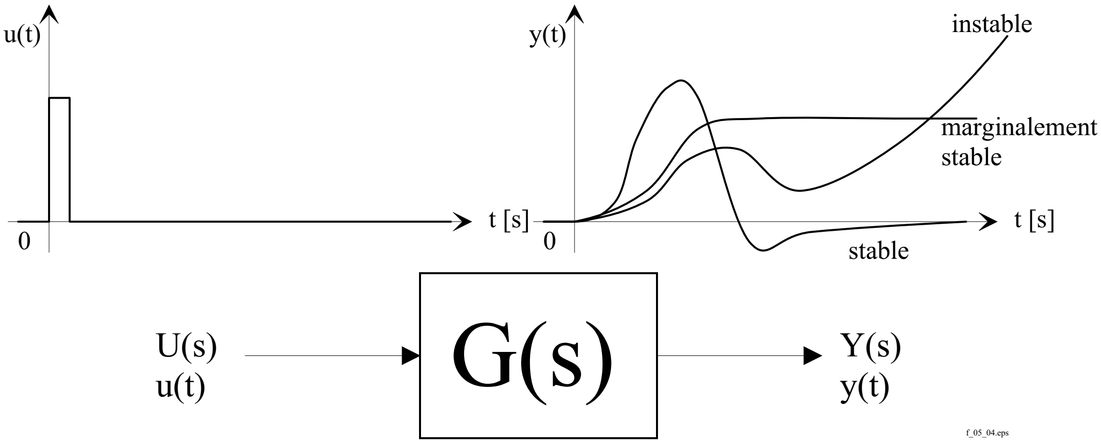


FIG. 5.1 – Illustration de la définition de la stabilité (fichier source).

(régulation de maintien),

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}$$
$$G_v(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_{a2}(s)}{1 + G_o(s)}$$

soient stables, sans quoi l'on se verrait dans l'impossibilité de gérer leur équilibre !

Ceci n'implique toutefois pas que les fonctions de transfert en boucle ouverte $G_o(s)$ ou celle du système à régler $G_a(s)$ soient elles-mêmes stables ! C'est en effet l'une des propriétés majeure de la technique de la contre-réaction que de pouvoir stabiliser des systèmes intrinsèquement instables comme le pendule inversé (figure 5.2 page ci-contre), le segway (figure 1.39 page 49), la fusée, les lévitation et sustentation magnétiques rencontrées dans les applications SwissMetro et paliers magnétiques (figure 1.40 page 49).

5.2.2 Etude de la stabilité par la réponse impulsionnelle

En appliquant mot pour mot la définition de la stabilité, on propose d'écarter le système dynamique linéaire $G(s)$ de sa position d'équilibre initiale en l'excitant ici par une impulsion de Dirac (figure 5.3 page 182). Ce signal a pour avantage notable de considérablement alléger les calculs (puisque $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$) tout en ayant la caractéristique mentionnée dans la définition "d'apparaître puis de disparaître".

Mathématiquement, on a

$$Y(s) = G(s) \cdot \underbrace{U(s)}_{\mathcal{L}\{\delta(t)\}} = G(s)$$

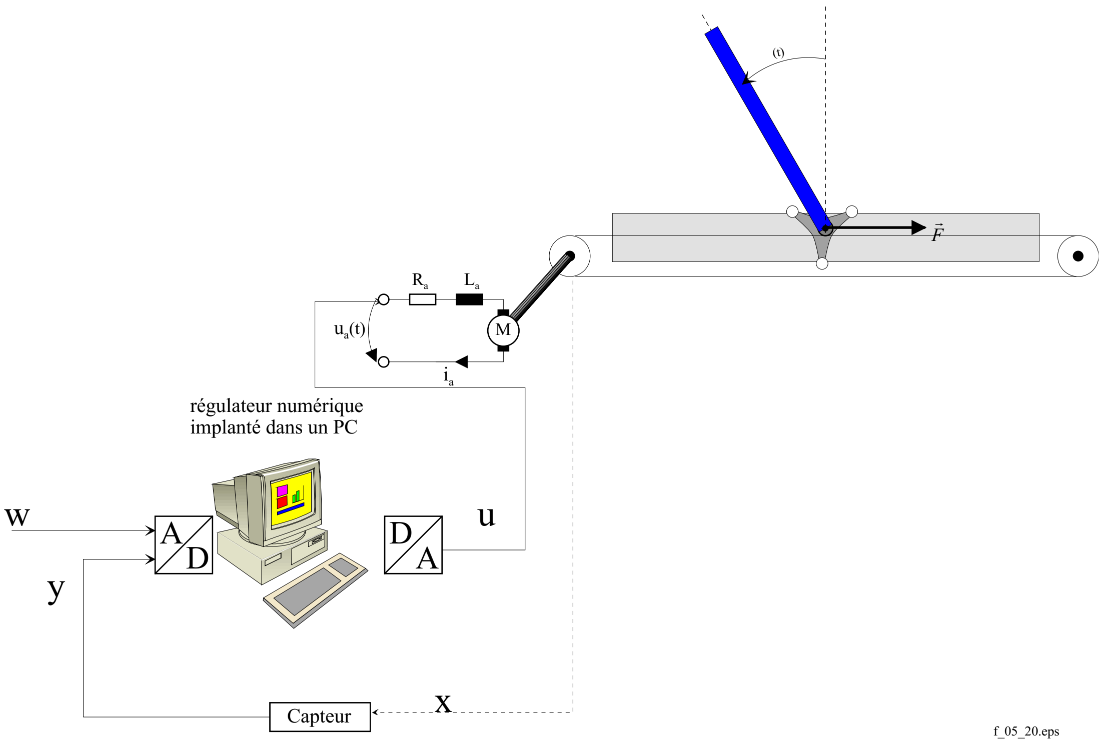


FIG. 5.2 – Pendule inversé : il s'agit d'un système intrinsèquement instable (fichier source).

$G(s)$ est une fraction rationelle en s :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0}$$

On admet pour ce qui suit que :

- $G(s)$ a plus de pôles que de zéros, i.e. son degré relatif $d = n - m > 0$ (on dit aussi que $G(s)$ est strictement propre) ;
- tous les pôles $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de $G(s)$ sont simples.

Dans ce cas, la décomposition de $G(s)$ en éléments simples prend la forme

$$Y(s) = G(s) = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2} + \ldots + \frac{C_n}{s - s_n}$$

où C_1 à C_n sont les *résidus* associés aux pôles s_1 à s_n. Il s'agit de nombres réels ou complexes.

On peut alors calculer la réponse $y(t)$ à la sollicitation $u(t) = \delta(t)$, i.e. la réponse impulsionnelle $g(t)$, en calculant la transformée de Laplace inverse :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = g(t) = C_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} + \ldots + C_n \cdot e^{s_n \cdot t} = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot e^{s_i \cdot t}$$

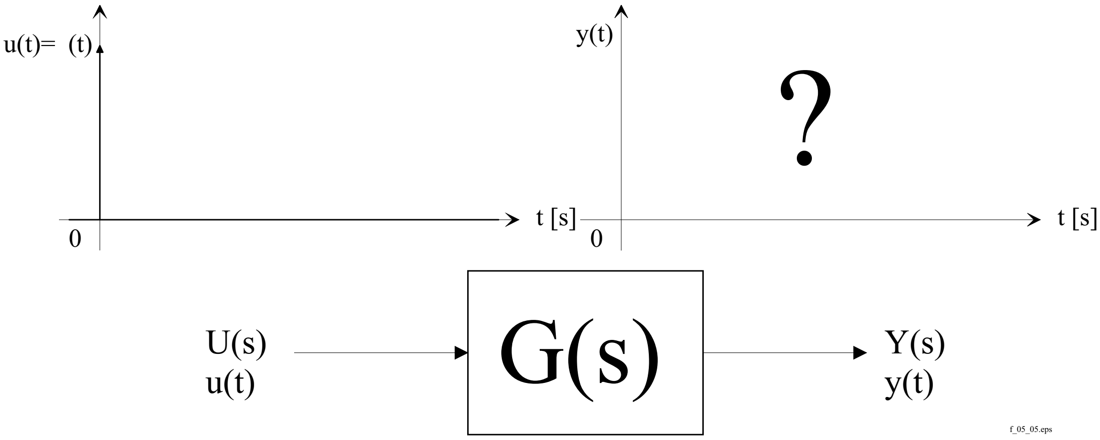


FIG. 5.3 – Application de la définition de la stabilité pour le cas ou $u(t) = \delta(t)$ (fichier source).

On voit que la réponse impulsionnelle $y(t) = g(t)$ est formée de la superposition de n termes de type $C_i \cdot e^{s_i \cdot t}$, appelés **modes** du système $G(s)$. A chaque pôle s_i est associé le mode temporel $C_i \cdot e^{s_i \cdot t}$. L'analyse modale consiste à mettre en évidence les modes d'un système dynamique et par suite les propriétés dynamiques (rapidité, oscillations, etc) de celui-ci. Dans ce but, il faudrait idéalement exciter le système avec une impulsion de Dirac ou l'observer lorsqu'il retrouve son état d'équilibre alors que ses conditions initiales sont non-nulles (c'est alors sa *réponse libre* qui serait observée). Dans ces cas, l'avantage est que le signal d'entrée n'influence que peu celui de sortie, lequel étant alors essentiellement constitué de la superposition des n modes que l'on cherche à observer.

Mode apériodique

Un mode apériodique est un mode associé à un pôle réel.

$$\frac{C_i}{s - s_i} \longrightarrow C_i \cdot e^{s_i \cdot t}$$

On voit qu'il s'agit d'un mode ayant l'allure d'une exponentielle dont le taux de croissance ou décroissance ne dépend que du pôle lui-même.

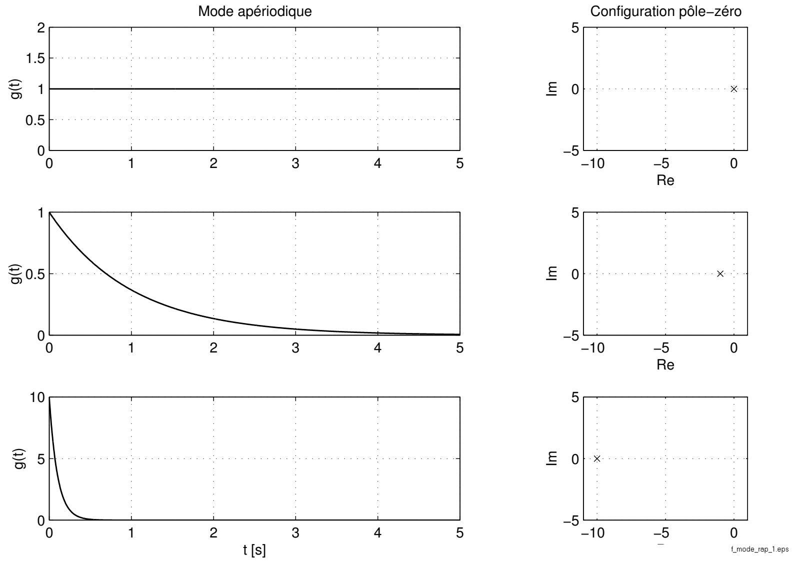


FIG. 5.4 – Mode apériodique : influence de la position du pôle sur la rapidité du mode (fichier source).

Mode oscillatoire

Un mode oscillatoire est un mode associé à une paire de pôles complexes conjugués.

$$\frac{k}{(s+\delta)^2+\omega_0^2} = \frac{C_i}{(s-s_i)} + \frac{\overline{C_i}}{(s-\overline{s_i})} \longrightarrow C_i \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

où

$$\begin{cases} -\delta = \Re\{s_i\} \\ \omega_0 = \Im\{s_i\} \end{cases}$$

Le mode oscillatoire est constitué d'un terme sinusoïdal pondéré par une exponentielle. La pulsation de la sinus est égale à la partie imaginaire (en valeur absolue) ω_0 des pôles et le paramètre de l'exponentielle est donné par leur partie réelle $-\delta$.

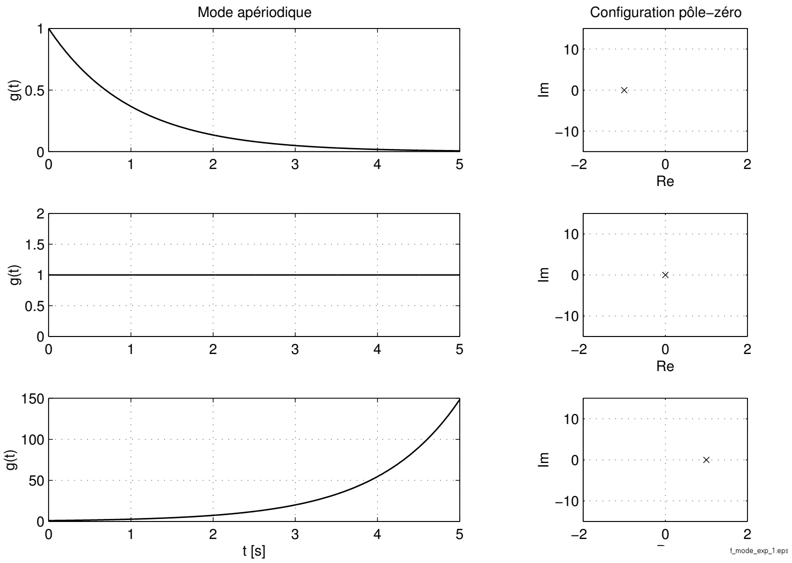


Fig. 5.5 – Mode apériodique : influence du signe du pôle sur le mode temporel (fichier source).

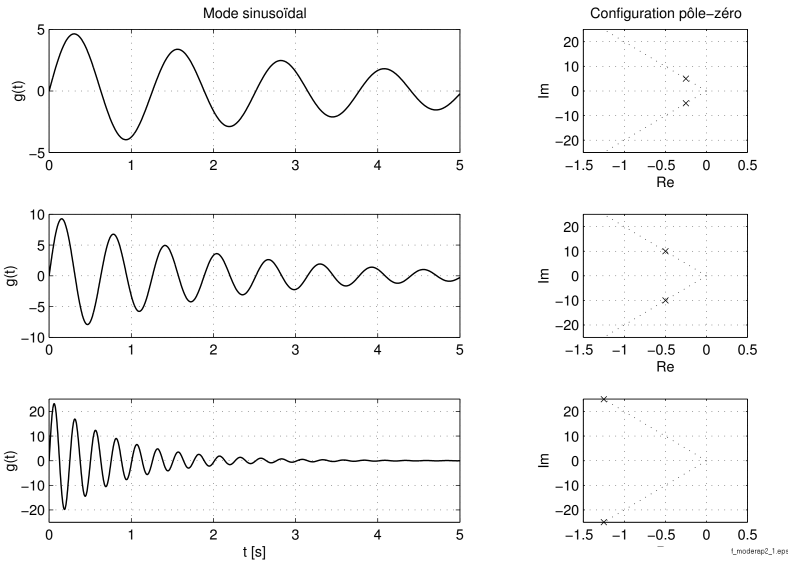


Fig. 5.6 – Mode oscillatoire : influence de la position des pôles sur la rapidité du mode (fichier source).

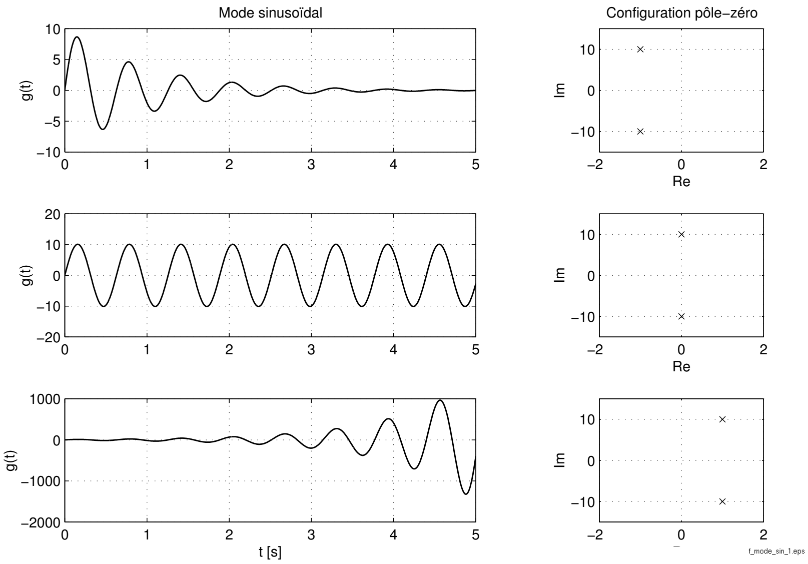


FIG. 5.7 – Mode oscillatoire : influence du signe de la partie réelle des pôles sur le mode temporel (fichier source).

5.2.3 Condition fondamentale de stabilité

Se référant à la définition de la stabilité du § 5.2.1 page 179 ainsi qu'à l'expression générale de la réponse impulsionnelle calculée au § 5.2.2 page 180, on voit que la réponse d'un système dynamique linéaire excité par une impulsion de Dirac

$$y(t) = g(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot e^{s_i \cdot t}$$

ne revient à son état initial $y(0) = 0$ si et seulement si tous les pôles s_1 à s_n de la fonction de transfert $G(s)$ sont à parties réelles négatives, i.e. sont situés dans le demi-plan complexe gauche. D'où la condition fondamentale de stabilité :

Un système dynamique linéaire est stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle négative :

$$\boxed{\Re\{s_i\} < 0 \, [s^{-1}]}$$

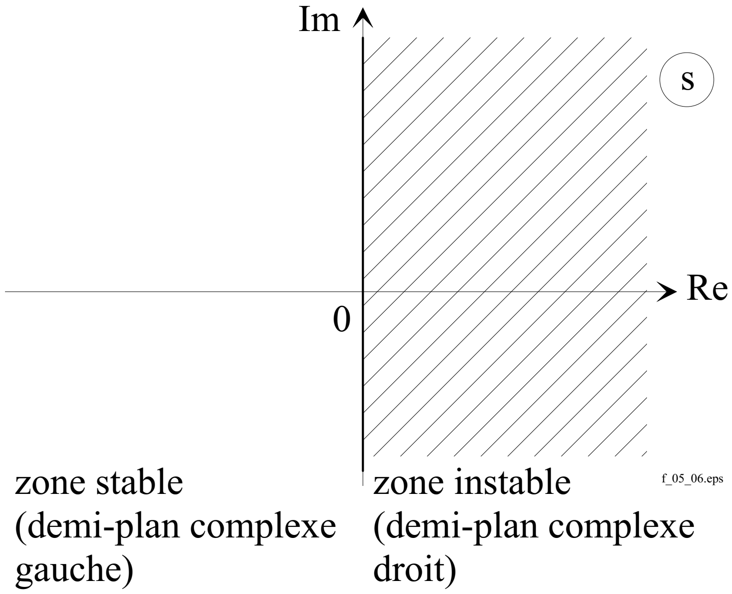


FIG. 5.8 – Zones de stabilité et d'instabilité du plan s (fichier source).

Remarque importante

La stabilité d'un système dynamique **linéaire** ne dépendant que des pôles de sa fonction de transfert, elle est donc une propriété intrinsèque au système, i.e.

elle ne dépend que de ses paramètres (a_1, a_2, ..., a_n, i.e. R_a, J, C_L, etc) **mais aucunement de l'excitation** $u(t)$.

Il est donc absolument faux de dire "le signal d'excitation a rendu le système instable" : il faudrait dans ce contexte là plutôt dire que "le signal d'entrée a excité l'un des modes instables du système" ou encore "le signal d'entrée a amorcé l'un des modes instables du système".

Il en va tout autrement dans le cas de système non-linéaires (qui ne sont étudiés que sporadiquement dans le cadre de ce cours), dont les propriétés sont typiquement dépendantes du signal d'entrée : il est alors envisageable d'utiliser le langage mentionné plus haut.

Cas particuliers

Si un système possède
- un ou plusieurs pôles à partie réelle positive, il est *instable* ;
- aucun pôle à partie réelle positive, il est *stable* ;
- un pôle situé à l'origine du plan complexe ($s_i = 0\,[\mathrm{s}^{-1}]$), ou une ou plusieurs paires de pôles imaginaires purs, il est *marginalement stable*.

5.3 Précision en régime permanent

La précision d'un système asservi est obtenue en chiffrant la valeur de l'erreur $e(t)$. On se limite ici à l'étude de la précision en régime permanent, i.e. à

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t)$$

Avant même l'étude du présent paragraphe, il a été montré dans le cadre de plusieurs exercices (amplificateurs opérationnels, moteur DC asservi en vitesse, etc) que les erreurs d'un système asservi dépendent essentiellement du gain de boucle $G_o(s)$, plus précisément de sa valeur permanente K_o lorsque l'on se restreint à l'étude des performances de précision en régime permanent :

$$e_\infty \propto \frac{1}{1+K_o} \approx \frac{1}{K_o}$$

Plus K_o est élevé, meilleure sera la précision d'où l'intérêt de rendre le gain de boucle $G_o(s)$ aussi élevé que possible, comme déja relevé aux §4.1.3 et 4.1.4. Ce résultat va être démontré ici dans le cas général, tenant compte des configurations possibles du système de régulation automatique :
- nombre d'intégrateurs dans $G_o(s)$;
- emplacement des intégrateurs dans $G_o(s)$;
- valeur du gain permanent de boucle K_o ;
- mode de régulation : correspondance ou maintien
- type de signal d'entrée : saut, rampe, etc.

5.3.1 Forme des fonctions de transfert

Afin de faciliter les calculs, toutes les fonctions de transfert sont mises sous forme de Bode :

$$
\begin{aligned}
G_{a1}(s) &= \frac{K_{a1}}{s^{\alpha_{a1}}} \cdot R_{a1}(s) \qquad && R_{a1}(0) = 1 \\
G_{a2}(s) &= \frac{K_{a2}}{s^{\alpha_{a2}}} \cdot R_{a2}(s) \qquad && R_{a2}(0) = 1 \\
G_{c}(s) &= \frac{K_{c}}{s^{\alpha_{c}}} \cdot R_{c}(s) \qquad && R_{c}(0) = 1 \\
G_{o}(s) &= \frac{K_{o}}{s^{\alpha}} \cdot R_{o}(s) \qquad && R_{o}(0) = 1
\end{aligned}
$$

où les termes $R_k(s)$ (i.e. $R_{a1}(s)$, $R_{a2}(s)$, $R_c(s)$ et $R_o(s)$) sont des fractions rationnelles en s,

$$\frac{1 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \ldots + b_m \cdot s^m}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \ldots + a_{n-\alpha} \cdot s^{n-\alpha}}$$

équivalentes aux fonctions de transfert sans les (éventuels) α_k pôles en $s = 0\,[\mathrm{s}^{-1}]$ et sans le gain permanent K_k.

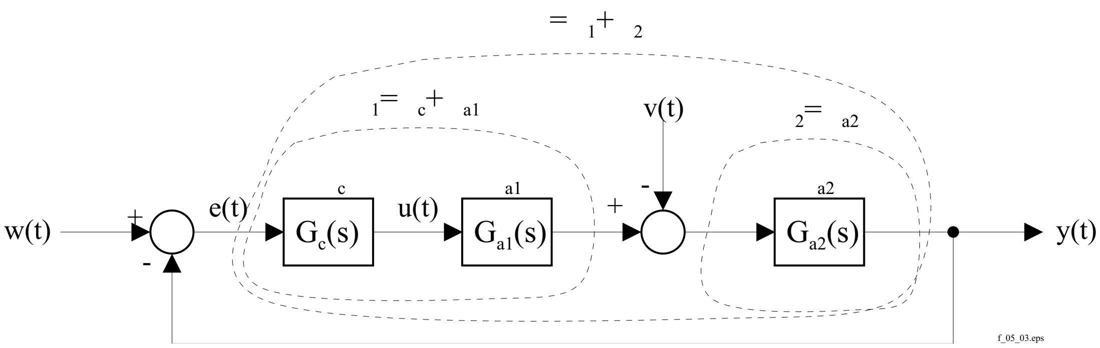


FIG. 5.9 – Schéma fonctionnel universel, avec mention des types de chacun des blocs (fichier source).

5.3.2 Calcul de l'erreur

L'erreur $e(t)$ a pour expression :

$$e(t) = w(t) - y(t)$$

En passant dans le domaine de Laplace, on a :

$$\begin{aligned}
E(s) &= W(s) - Y(s) \\
&= W(s) - [G_c(s) \cdot G_a(s) \cdot E(s) - G_{a2}(s) \cdot V(s)] \\
E(s) \cdot (1 + G_c(s) \cdot G_a(s)) &= W(s) + G_{a2}(s) \cdot V(s) \\
E(s) &= \frac{1}{1 + G_c(s) \cdot G_a(s)} \cdot W(s) + \frac{G_{a2}(s)}{1 + G_c(s) \cdot G_a(s)} \cdot V(s) \\
E(s) &= \frac{1}{1 + G_o(s)} \cdot W(s) + \frac{G_{a2}(s)}{1 + G_o(s)} \cdot V(s)
\end{aligned}$$

En régime permanent, l'erreur s'écrit, en appliquant le théorème de la valeur finale :

$$\begin{aligned}
E_p &= \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) \\
&= \lim_{s\to 0}\left[\frac{s}{1 + G_o(s)} \cdot W(s)\right] + \lim_{s\to 0}\left[\frac{s \cdot G_{a2}(s)}{1 + G_o(s)} \cdot V(s)\right] \\
&= \lim_{s\to 0}\left[\frac{s}{1 + \frac{K_o}{s^\alpha} \cdot R_o(s)} \cdot W(s)\right] + \lim_{s\to 0}\left[\frac{s \cdot \frac{K_{a2}}{s^{\alpha_{a2}}} \cdot R_{a2}(s)}{1 + \frac{K_o}{s^\alpha} \cdot R_o(s)} \cdot V(s)\right] \\
&= \lim_{s\to 0}\left[\frac{s^{\alpha+1}}{s^\alpha + K_o} \cdot W(s)\right] + \lim_{s\to 0}\left[\frac{K_{a2} \cdot s^{\alpha-\alpha_{a2}+1}}{s^\alpha + K_o} \cdot V(s)\right] \\
&= \lim_{s\to 0}\left[\frac{s^{\alpha+1}}{s^\alpha + K_o} \cdot W(s)\right] + \lim_{s\to 0}\left[\frac{K_{a2} \cdot s^{\alpha_1+1}}{s^\alpha + K_o} \cdot V(s)\right]
\end{aligned}$$

où $\alpha_1 = \alpha - \alpha_{a2}$ représente le nombre d'intégrateurs situés avant le point d'introduction des perturbations.

On constate que l'erreur permanente E_p dépend de $w(t)$ et de $v(t)$, du gain permament de boucle K_a, du gain permanent K_{a2} de $G_{a2}(s)$, du nombre α d'intégrateurs situés dans la boucle ainsi que du nombre α_1 d'intégrateurs situés avant le point d'introduction des perturbations $v(t)$.

5.3.3 Cas particulier : erreur statique E_∞

Lorsque $w(t)$ et $v(t)$ sont constantes (pour $t \to \infty$), l'erreur en régime permanent s'appelle *erreur statique* ou erreur d'ordre 0. On a :

$$w(t) = \epsilon(t) \qquad\qquad v(t) = \epsilon(t)$$

$$W(s) = \frac{1}{s} \qquad\qquad V(s) = \frac{1}{s}$$

– si $\alpha = 0$, i.e. il n'y a aucune intégration dans la boucle ($\alpha = 0$, $\alpha_1 = 0$,

$\alpha_2 = 0$), on a :

$$
\begin{aligned}
E_p = E_\infty &= \lim_{s\to 0}\left[\frac{s^{\alpha+1}}{s^\alpha + K_o}\cdot\frac{1}{s}\right] && + \lim_{s\to 0}\left[\frac{K_{a2}\cdot s^{\alpha_1+1}}{s^\alpha + K_o}\cdot\frac{1}{s}\right]\\
&= \lim_{s\to 0}\left[\frac{s^0}{s^0 + K_o}\right] && + \lim_{s\to 0}\left[\frac{K_{a2}\cdot s^0}{s^0 + K_o}\right]\\
&= \left[\frac{1}{1 + K_o}\right] && + \left[\frac{K_{a2}}{1 + K_o}\right]\\
&= E_{\infty w} && + E_{\infty v}
\end{aligned}
$$

– si $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, i.e. il y a une intégration dans la boucle, l'intégrateur étant situé avant le point d'introduction des perturbations, on a :

$$
\begin{aligned}
E_p = E_\infty &= \lim_{s\to 0}\left[\frac{s^{\alpha+1}}{s^\alpha + K_o}\cdot\frac{1}{s}\right] && + \lim_{s\to 0}\left[\frac{K_{a2}\cdot s^{\alpha_1+1}}{s^\alpha + K_o}\cdot\frac{1}{s}\right]\\
&= \lim_{s\to 0}\left[\frac{s^1}{s^1 + K_o}\right] && + \lim_{s\to 0}\left[\frac{K_{a2}\cdot s^1}{s^1 + K_o}\right]\\
&= [0] && + [0]\\
&= E_{\infty w} && + E_{\infty v}
\end{aligned}
$$

– si $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, i.e. il y a une intégration dans la boucle, l'intégrateur étant situé **après** le point d'introduction des perturbations, on a :

$$
\begin{aligned}
E_p = E_\infty &= \lim_{s\to 0}\left[\frac{s^{\alpha+1}}{s^\alpha + K_o}\cdot\frac{1}{s}\right] && + \lim_{s\to 0}\left[\frac{K_{a2}\cdot s^{\alpha_1+1}}{s^\alpha + K_o}\cdot\frac{1}{s}\right]\\
&= \lim_{s\to 0}\left[\frac{s^1}{s^1 + K_o}\right] && + \lim_{s\to 0}\left[\frac{K_{a2}\cdot s^0}{s^1 + K_o}\right]\\
&= [0] && + \left[\frac{K_{a2}}{K_o}\right]\\
&= [0] && + \left[\frac{1}{K_{a1}}\right]\\
&= E_{\infty w} && + E_{\infty v}
\end{aligned}
$$

On observe que pour annuler une erreur statique, il faut une intégration dans la boucle, celle-ci devant impérativement se situer en **amont** du point d'introduction des perturbations si l'on veut annuler l'effet de ces dernières.

5.3.4 Généralisation : erreurs d'ordre supérieur

Les calculs effectués ci-dessus peuvent être répétés dans d'autres cas de figures, par exemple pour différentes valeurs de α et des signaux d'entrée $w(t)$ et

$v(t)$ d'ordres plus élevés. Les résultats sont obtenus selon le même principe et condensés dans le tableau des erreurs permanentes ci-dessous (tableau 5.1).

Lorsque les signaux d'entrée $w(t)$ et $v(t)$ sont d'ordre 1 (rampe), l'erreur permanente qu'il provoquent est l'erreur d'ordre 1 ou *erreur en vitesse* (figure 5.10 page suivante). De même, pour des signaux d'ordre 2, l'erreur permanente est nommée erreur d'ordre 2 ou *erreur en accélération*.

α_1	α_2	α	Erreur statique (erreur d'ordre 0) E_∞		Erreur en vitesse (erreur d'ordre 1) E_v		Erreur en accélération (erreur d'ordre 2) E_a	
			$E_{\infty w}$	$E_{\infty v}$	E_{vw}	E_{vv}	E_{aw}	E_{av}
0	0	0	$\frac{1}{1+K_o}$	$\frac{K_{a2}}{1+K_o}$	∞	∞	∞	∞
0	1	1	0	$\frac{K_{a2}}{K_o}$	$\frac{1}{K_o}$	∞	∞	∞
1	0	1	0	0	$\frac{1}{K_o}$	$\frac{K_{a2}}{K_o}$	∞	∞
1	1	2	0	0	0	$\frac{K_{a2}}{K_o}$	$\frac{1}{K_o}$	∞
2	0	2	0	0	0	0	$\frac{1}{K_o}$	$\frac{K_{a2}}{K_o}$
2	1	3	0	0	0	0	0	$\frac{K_{a2}}{K_o}$

TAB. 5.1 – Tableau des erreurs permanentes.

Erreurs permanentes en régulation de correspondance

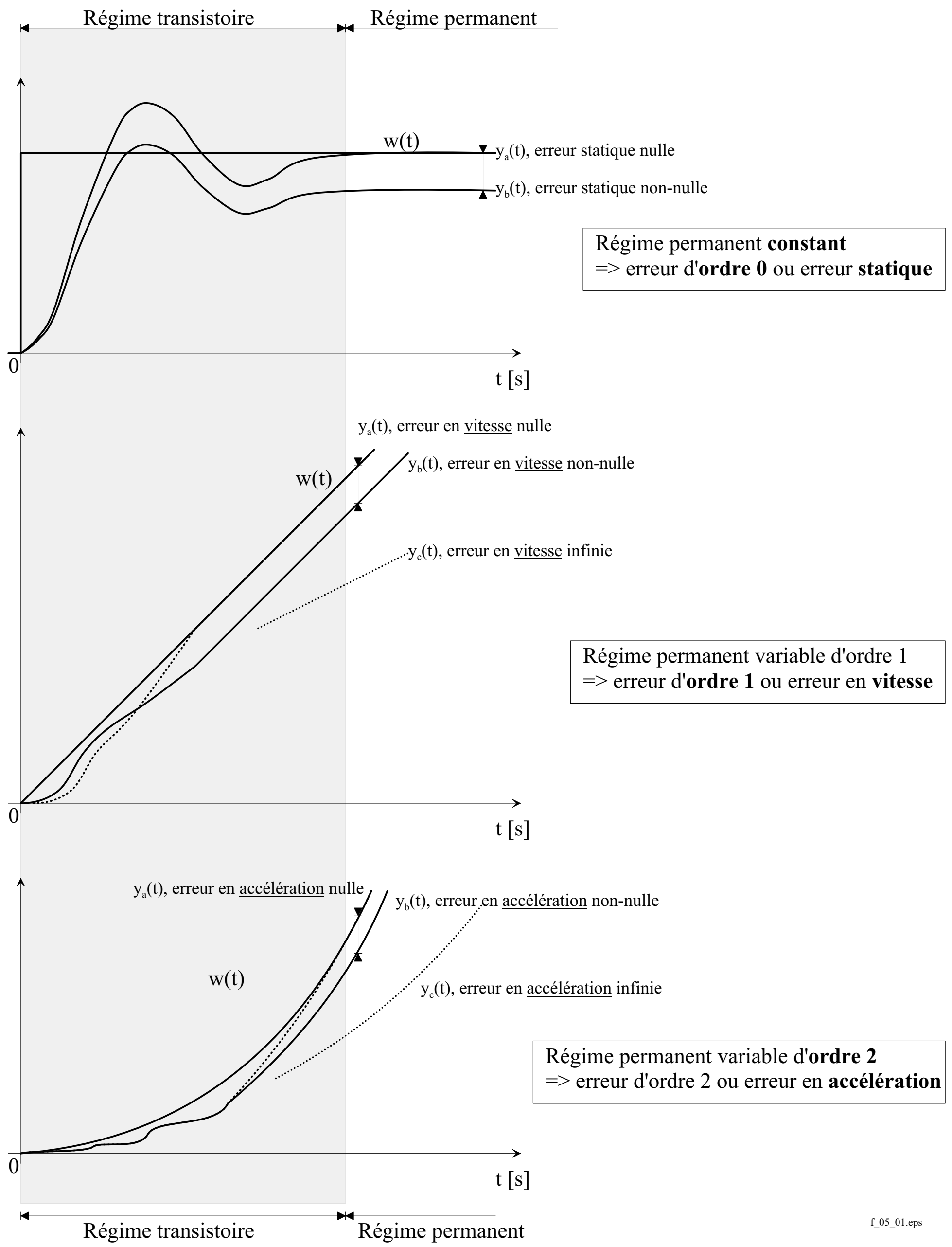


FIG. 5.10 – Erreurs permanentes en régulation de correspondance (fichier source).

5.4 Rapidité des systèmes de régulation automatique

La rapidité d'un système de régulation automatique peut être évaluée sur la base de sa réponse indicielle en boucle fermée, par exemple en régulation de correspondance (figure 5.11). La **durée de réglage** T_{reg} est la durée mesurée

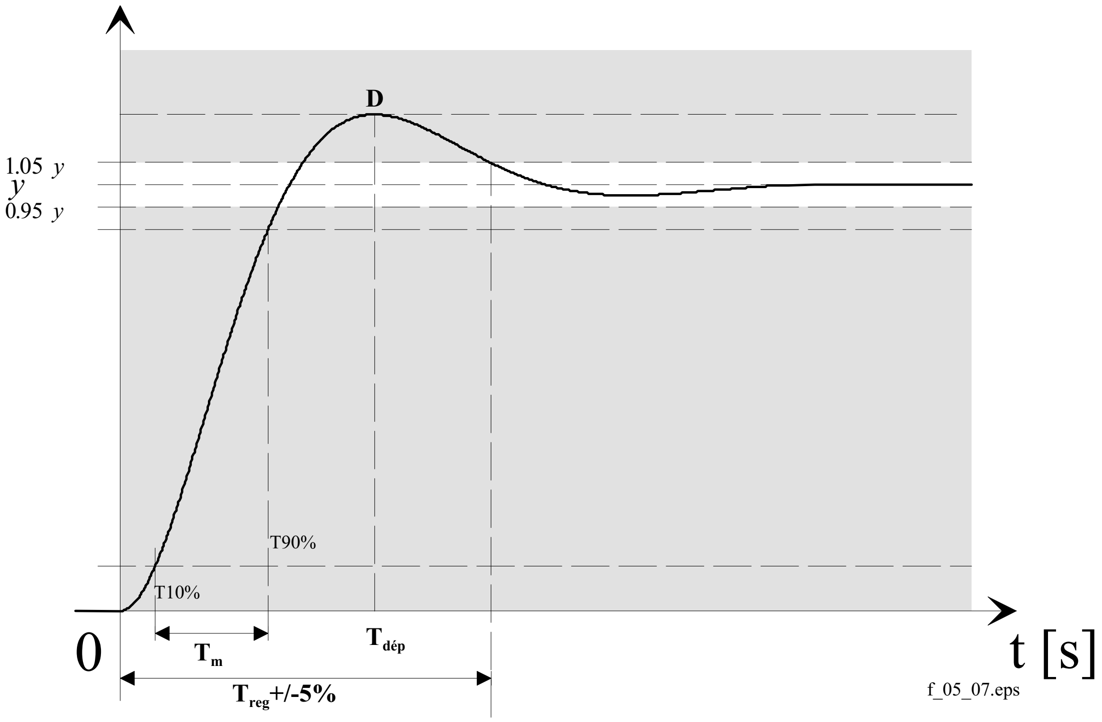


FIG. 5.11 – Définition de la durée de réglage T_{reg} à $\pm 5\%$, du temps de montée T_m et du temps de dépassement $T_{\text{dép}}$ (fichier source).

entre l'instant d'application du saut de consigne $w(t)$ et l'instant où la grandeur réglée $y(t)$ ne s'écarte plus d'une bande de tolérance de $\pm 5\%$ tracée autour de sa valeur finale y_∞.

Le **temps de montée** T_m est la durée que met le signal $y(t)$ pour passer de 10 à 90% de sa valeur finale y_∞.

5.4.1 Cas particulier où $G_w(s)$ est d'ordre 1 fondamental

Si, en régulation de correspondance, on a

$$\begin{aligned} G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} &= \frac{K_w}{1 + s \cdot T_f} \\ &= \frac{K_w}{T_f} \cdot \frac{1}{s - \underbrace{(-\frac{1}{T_f})}_{s_f}} = \frac{k_f}{s - s_f} \end{aligned}$$

i.e. si la fonction de transfert en boucle fermée, régulation de correspondance, a la forme d'un système fondamental d'ordre 1, la durée de réglage T_{reg} peut se calculer très facilement. On a pour la réponse indicielle :

$$y(t) = K_w \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_f}}\right)$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} y(T_{reg}) = 0.95 \cdot y_\infty = K_w \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_{reg}}{T_f}}\right) \\ K_w = 0.95 \cdot K_w \end{aligned}$$

soit encore :

$$T_{reg} = -T_f \cdot \log(1 - 0.95) \approx 3 \cdot T_f$$

On en déduit la durée de réglage T_{reg} :

$$\boxed{T_{reg} = 3 \cdot T_f = \frac{3}{|s_f|} = \frac{3}{|\Re\{s_f\}|}}$$

Considérant la configuration pôle-zéro de 2 systèmes asservis (figure 5.12 page suivante), par exemple

- $G_{w1}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{K_{w1}}{1+ s \cdot T_{f1}}$
- $G_{w2}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{K_{w2}}{1+ s \cdot T_{f2}}$

on peut en déduire facilement lequel est le plus rapide.

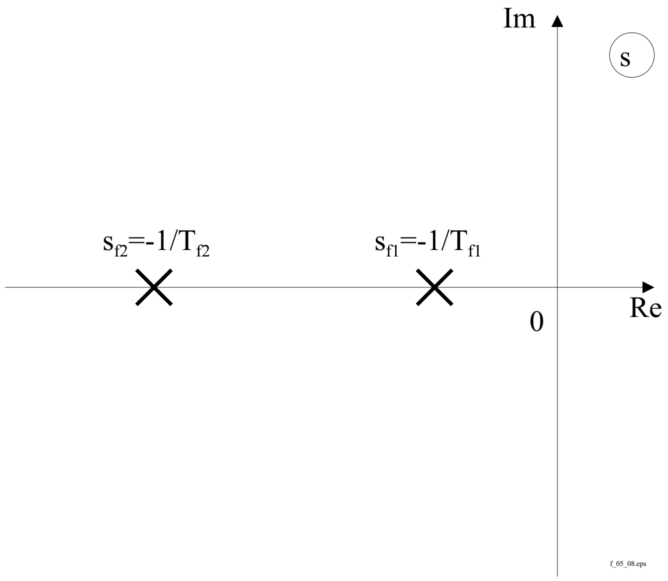


FIG. 5.12 – La configuration pôle-zéro montre que le système asservi 2 est plus rapide que le système asservi 1 (fichier source).

5.4.2 Cas particulier où $G_w(s)$ est d'ordre 2 fondamental

Lorsqu'en régulation de correspondance, on a

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{K_w}{1 + \frac{2\cdot\zeta}{\omega_n} \cdot s + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot s^2} = \frac{k_w}{(s+\delta)^2 + \omega_0^2}$$

les pôles en boucle fermée sont $s_{f1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_0$ (figure 5.13 page suivante) et la réponse indicielle a pour expression :

$$y(t) = K_w \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot t + \varphi\right)\right)$$

Il n'y a malheureusement pas de solution analytique fournissant T_{reg}, mais une résolution numérique montre que l'on a approximativement

$$\boxed{T_{reg} \approx \frac{3}{\delta} = \frac{3}{|\Re\{s_f\}|}}$$

On remarquera que cette relation est identique à celle obtenue précédemment pour le cas où $G_w(s)$ est fondamentale d'ordre 1.

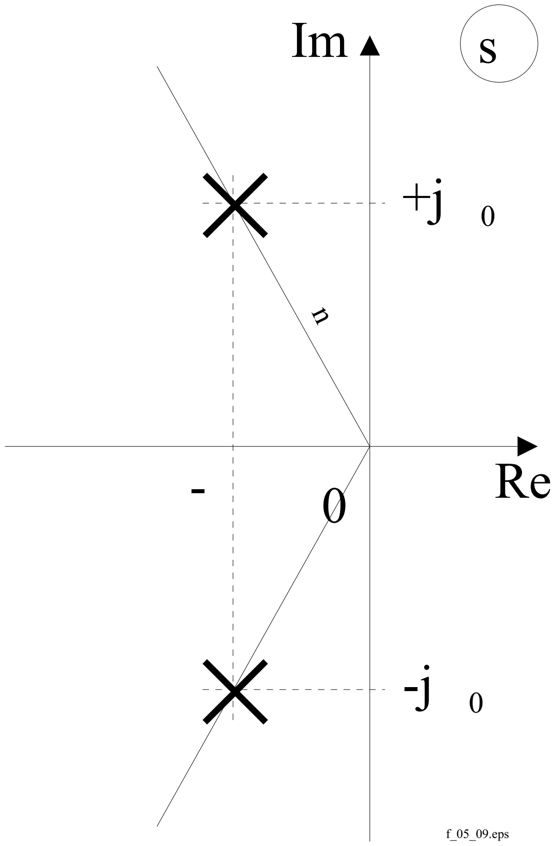


Fig. 5.13 – Configuration pôle-zéro d'un système d'ordre 2 fondamental (fichier source).

5.4.3 Systèmes à temps mort (retard pur)

Un temps mort, ou retard pur, est l'intervalle de temps T_r compris entre l'instant où l'on provoque une variation de la grandeur d'entrée $u(t)$ d'un système et celui où débute la variation corrélative de la grandeur de sortie $y(t)$ (figure 5.14 page suivante). Le retard pur se traduit au niveau des fonctions de transfert des systèmes dynamiques par le terme

$$\boxed{e^{-s\cdot T_r}}$$

car

$$\mathcal{L}\left\{u(t-T_r\right\} = U(s)\cdot e^{-s\cdot T_r}$$

Un exemple de système à retard pur est celui de la douche (§ 1.5.1 page 30). Le retard pur observé est dû au temps de transport dans la conduite.

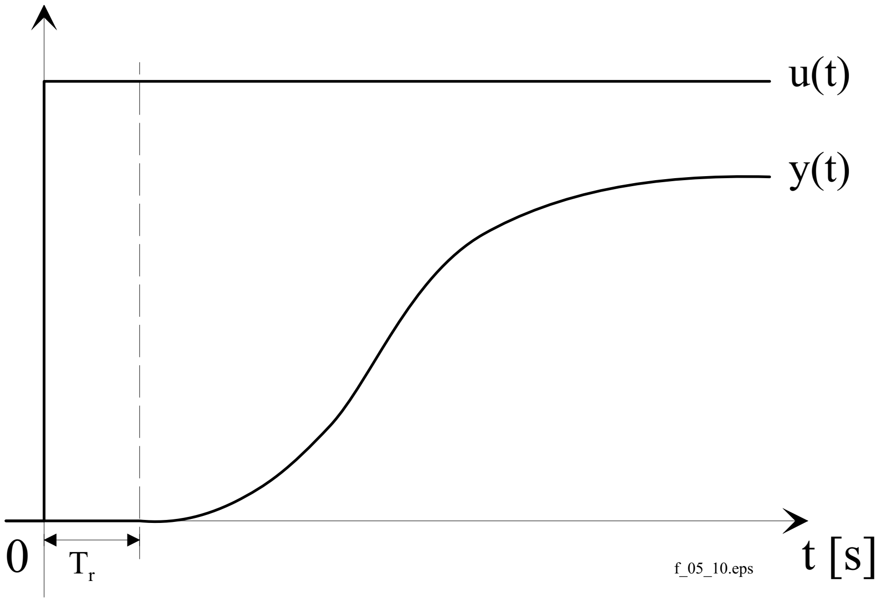


FIG. 5.14 – Réponse indicielle d'un système possédant un retard pur T_r (fichier source).

5.5 Qualité

Lorsqu'un système de régulation automatique satisfait le cahier des charges des points de vue
- stabilité
- précision
- rapidité

il faut encore procéder à certaines vérifications, comme le montre la figure 5.15 page suivante, où le dépassement de $y_2(t)$ peut être inacceptable pour l'application. Pour départager "objectivement" 2 systèmes, on peut calculer l'un ou l'autre des critères d'intégrale (fonction coût) suivants :
- ISE : "integral of square of error"

$$J_{ISE} = \int_0^{T_{\mathrm{reg}}} e(\tau)^2 \cdot d\tau$$

- "ITSE" : integral of time multiplied by square of error

$$J_{ITSE} = \int_0^{T_{\mathrm{reg}}} \tau \cdot e(\tau)^2 \cdot d\tau$$

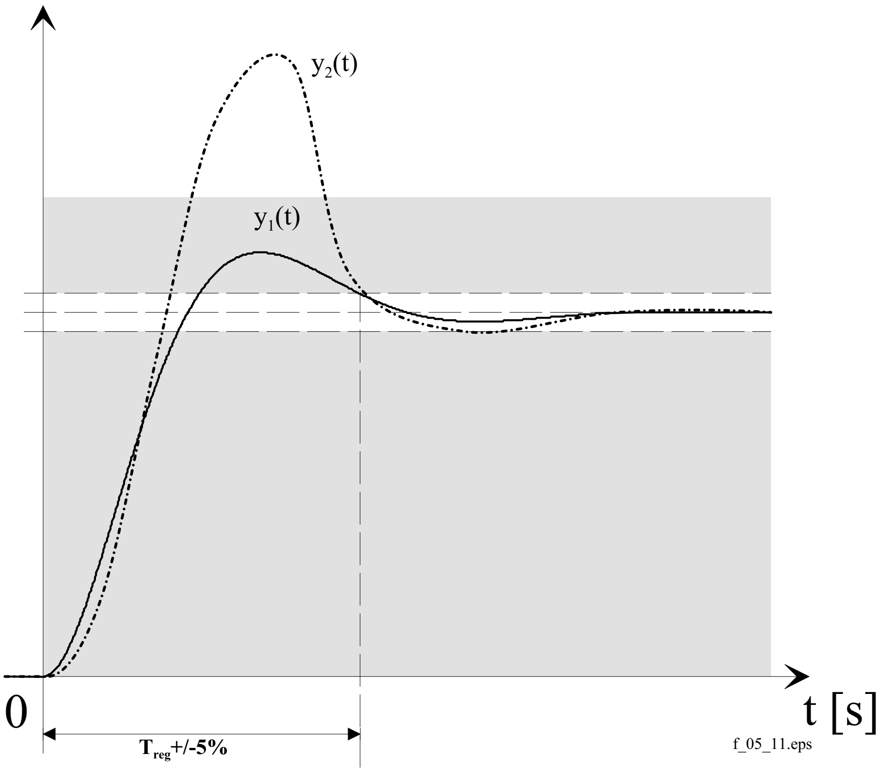


Fig. 5.15 – Réponses indicielles de 2 systèmes asservis, ayant les mêmes performances en stabilité, précision et rapidité (fichier source).

Il est également possible de prendre en compte l'énergie nécessaire pour effectuer l'asservissement en calculant par exemple

$$J = q \cdot \underbrace{\int_0^{T_{\text{reg}}} e(\tau)^2 \cdot d\tau}_{J_{ISE}} + r \cdot \underbrace{\int_0^{T_{\text{reg}}} u(\tau)^2 \cdot d\tau}_{J_{ISU}}$$

où les coefficients q et r font office de facteurs de pondération, permettant de pénaliser plus ou moins les systèmes ayant un faible J_{ISE} mais un fort J_{ISU}.

5.6 Pôles dominants

Un système dynamique linéaire d'ordre n, i.e. possédant n pôles, est dit à pôles dominants lorsque son comportement dynamique est largement influencé par un nombre limité, i.e. inférieur à n, de pôles appelés alors pôles dominants. Dans ces cas, on peut alors représenter le système de manière suffisamment fidèle par ses pôles dominants, ce qui présente l'avantage de simplifier les calculs, notamment ceux nécessaires à l'obtention des réponses temporelles (figures 5.16 et 5.17 page suivante).

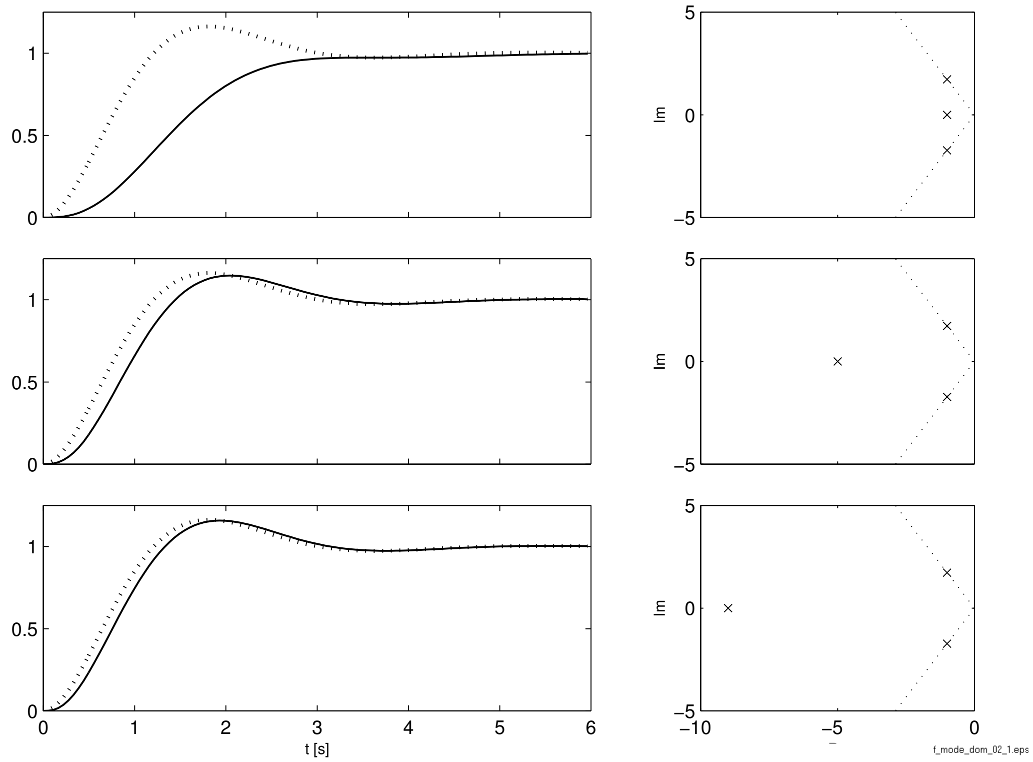


FIG. 5.16 – Réponses indicielles d'un système d'ordre 3 : progressivement, le 3^{eme} pôle, réel, est éloigné des 2 autres et l'on observe la diminution de son effet sur le régime transitoire. En pointillé, la réponse indicielle des 2 pôles dominants seuls, mettant clairement en évidence l'influence de plus en plus faible du pôle non-dominant (fichier source).

5.6.1 Pôles dominants des systèmes asservis

Dans le cas des systèmes de régulation automatique, on obtient souvent de manière naturelle (règle no 5 du tracé du lieu d'Evans, § 7.6 page 256), en boucle fermée, des systèmes possédant 1 pôle ou une paire de pôles dominants. La question discutée ici est de savoir quelles sont les caractéristiques de ces pôles.

Les § 5.4.1 page 194 et 5.4.2 page 195 ont montré que la durée de réglage T_{reg} était directement dépendante de la partie réelle des pôles. Partant du cahier des charges (initial) d'un système asservi, on peut ainsi en déduire directement

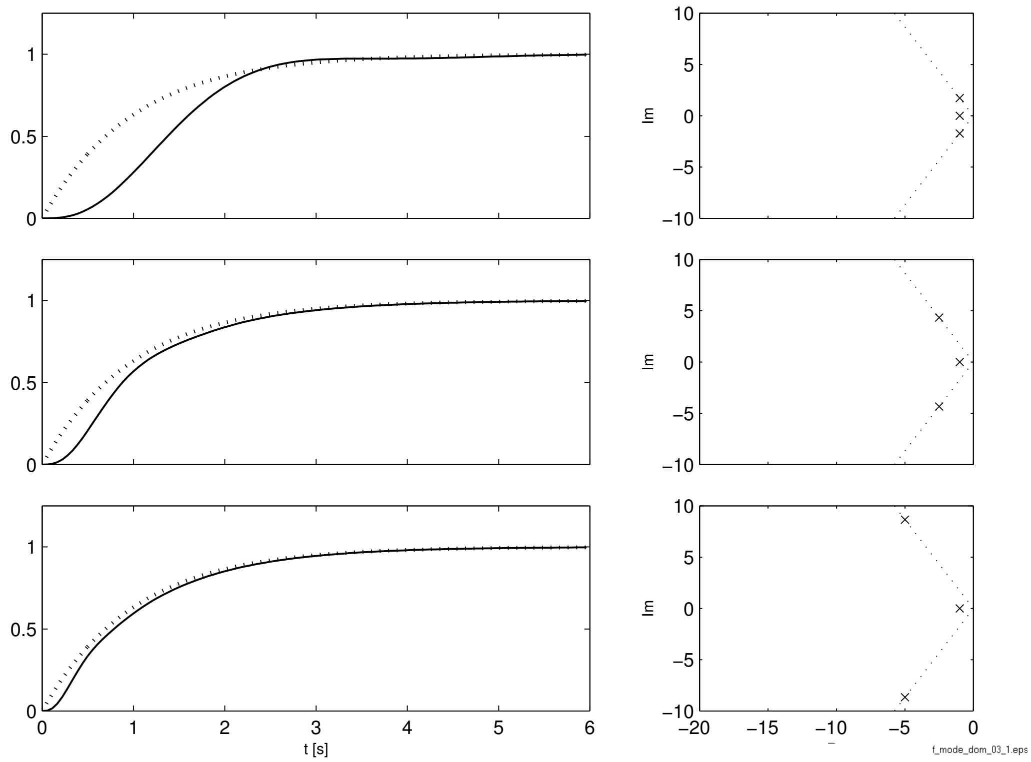


Fig. 5.17 – Réponses indicielles d'un système d'ordre 3 : progressivement, la paire de pôles complexes, est éloignée du pôle restant et l'on observe la diminution de son effet sur le régime transitoire. En pointillé, la réponse indicielle du pôle dominant seul, mettant clairement en évidence l'influence de plus en plus faible des pôles non-dominants (fichier source).

– la position du pôle dominant (cas d'un système à 1 seul pôle dominant) :

$$s_f = -\frac{3}{T_{\mathsf{reg}}}$$

– la partie réelle de la paire de pôles dominants (cas d'un système à 1 paire de pôles dominants)

$$\Re\left\{s_{f1,2}\right\} = -\frac{3}{T_{\mathsf{reg}}}$$

Concernant la partie imaginaire des pôles, elle peut être obtenue sachant qu'un comportement oscillatoire optimal (i.e. environ une oscillation complète avant stabilisation) est obtenu pour des taux d'amortissement ζ de l'ordre de $0.5 \ldots 0.707 =$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ceci implique que parties réelles et imaginaires, liées par la relation

$$\zeta = \sin(\Psi) = \frac{\delta}{\omega_n} = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}} = \text{const.}$$

soient telles que les pôles dominants soient situés sur 2 demi-droites issues de l'origine et formant un angle Ψ avec l'axe imaginaire (figure 5.18). Ces demi-droites, correspondant à un taux d'amortissement ζ donné ($\Psi = 30$ [°] pour $\zeta = 0.5$, $\Psi = 45$ [°] pour $\zeta = 0.707$, voir figure 5.19 page suivante), portent le nom de *courbes équi-amortissement*.

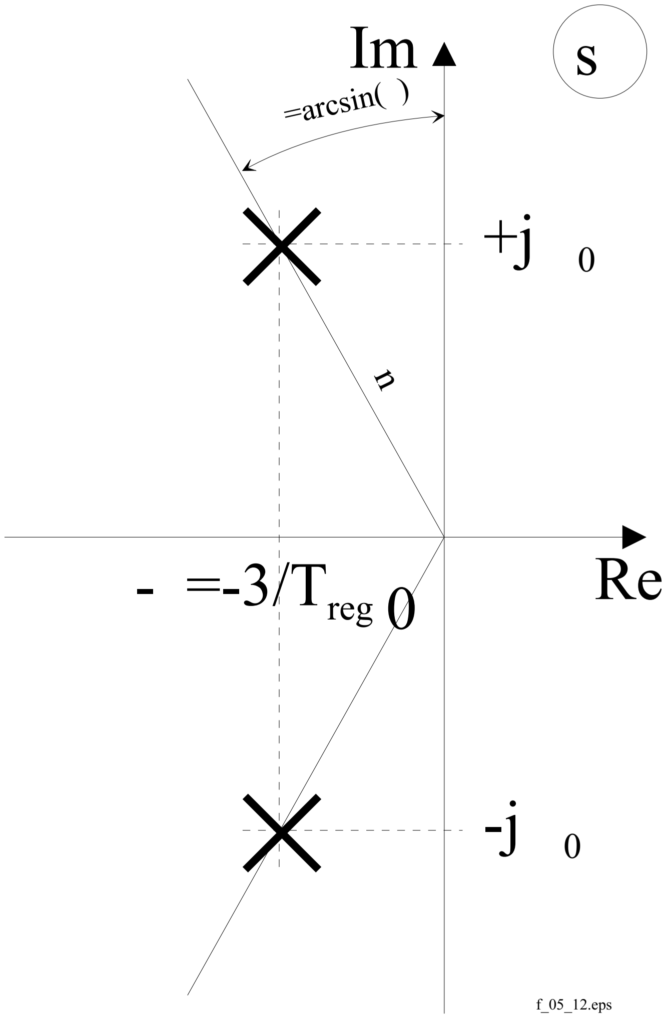


FIG. 5.18 – Partant de la durée de réglage T_{reg} qui fixe la partie réelle des pôles dominants, leur partie imaginaire est déterminée en imposant un taux d'amortissement ζ, i.e. en recherchant l'intersection entre la droite verticale d'abcisse $-\delta$ et la courbe équi-amortissement correspondant à ζ (fichier source).

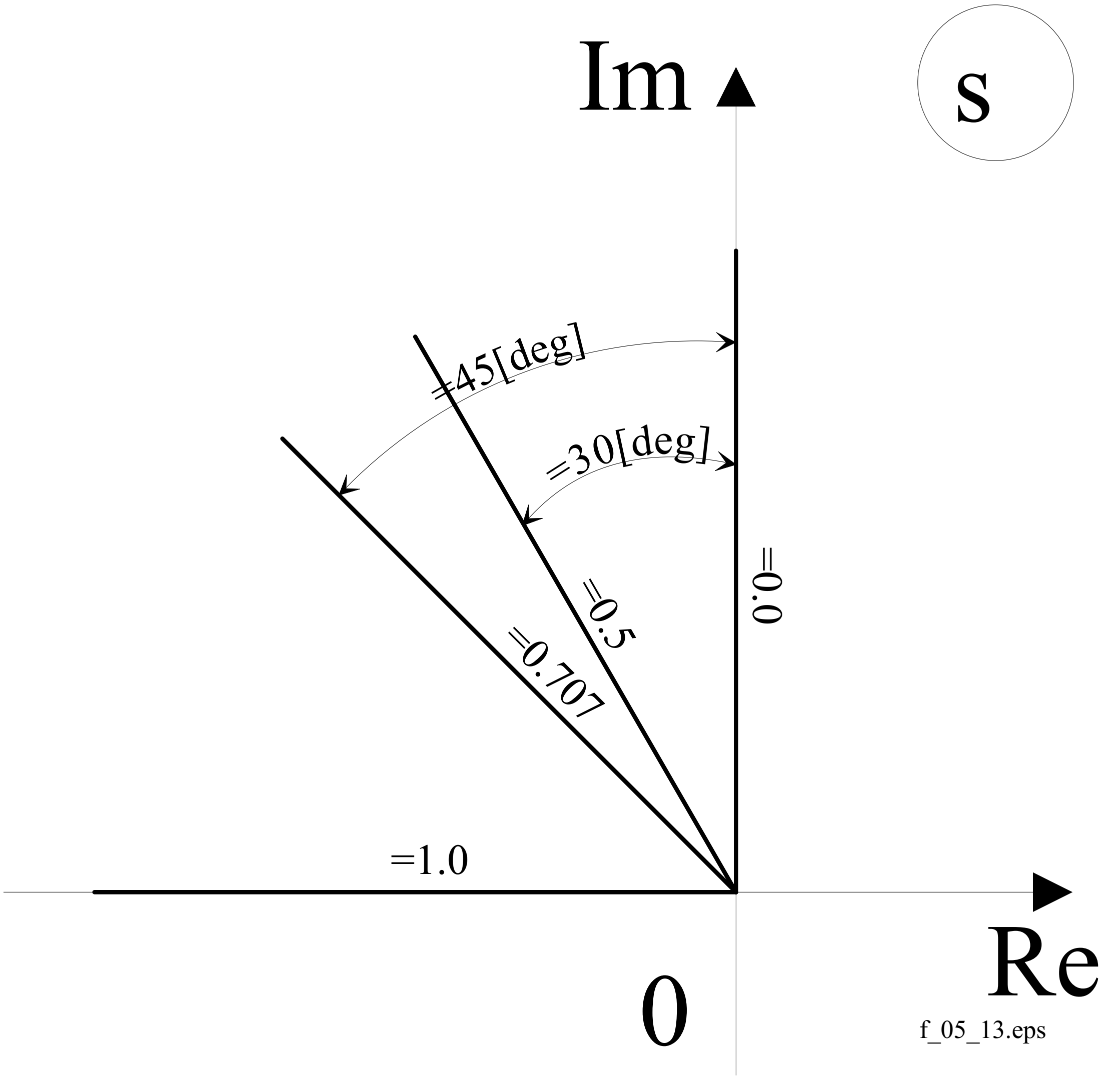


Fig. 5.19 – Courbes équi-amortissement correspondant à plusieurs valeurs de ζ (fichier source).

Chapitre 6

Analyse fréquentielle

6.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de fournir les outils nécessaires à l'évaluation des performances (en particulier la stabilité et la rapidité) des systèmes asservis en se basant sur leur réponses fréquentielles dans différents modes de travail (boucle ouverte, fermée, etc). La réponse fréquentielle d'un système dynamique pouvant être obtenue aussi bien théoriquement que pratiquement ([10], chap.8), ce chapitre présente donc un très grand intérêt en vue d'applications industrielles. De surcroît, les méthodes d'analyse et de synthèse fréquentielles, quelque peu délaissées durant les années 70, connaissent un très grand regain d'intérêt depuis 1980, où leur utilisation dans le domaine de la commande robuste s'est avérée très avantageuse.

6.2 Analyse fréquentielle de systèmes dynamiques, réponse harmonique

L'analyse fréquentielle des systèmes dynamiques consiste à étudier les propriétés de ceux-ci en régime **permanent** sinusoïdal. Dans le cas des systèmes linéaires stables, l'analyse fréquentielle fournit la **réponse harmonique**, fonction dépendant de la fréquence et décrivant comment, en régime permanent, le système amplifie et déphase les signaux sinusoïdaux appliqués à son entrée.

Le régime permanent sinusoïdal est obtenu lorsque les transitoires ont été amorties, i.e. pour $t \to \infty$ (figure 6.1 page suivante).

6.2.1 Calcul de la réponse harmonique

On considère un système dynamique linéaire **stable**, de fonction de transfert $G(s)$. On souhaite obtenir sa réponse harmonique sous forme analytique, i.e. la

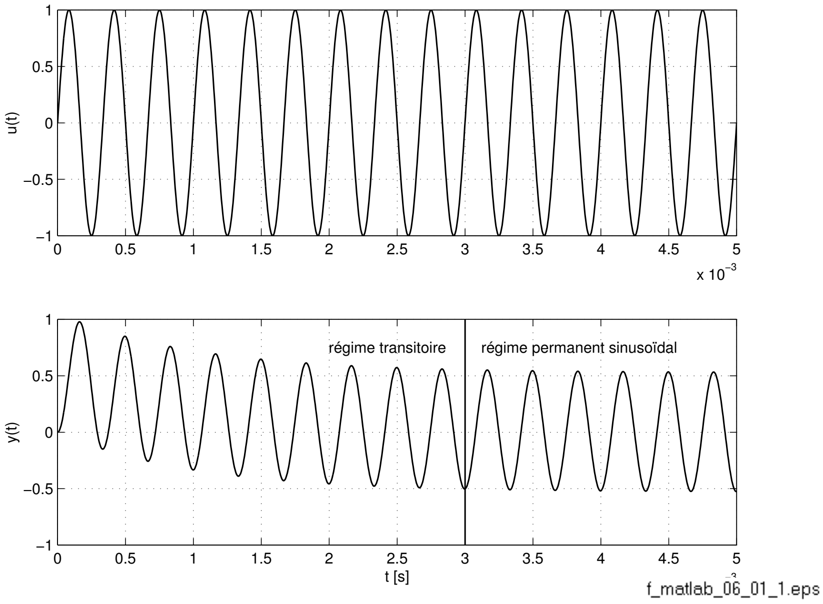


FIG. 6.1 – La réponse harmonique exprime les propriétés d'un système dynamique en régime permament sinusoïdal (fichier source).

fonction décrivant comment $G(s)$ amplifie et déphase les signaux sinusoïdaux en régime permanent. Pour ce faire, on applique à l'entrée du système étudié le signal sinusoïdal $u(t) = A_u \cdot \sin(\omega \cdot t)$. Le système étant linéaire par hypothèse, on peut poser $A_u = 1$. De plus, pour les mêmes raisons, et en vue d'alléger les calculs, on peut exciter le système non pas avec $u(t) = \sin(\omega \cdot t)$ mais avec l'entrée complexe

$$u(t) = \cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t) = e^{j \cdot \omega \cdot t}$$

Par linéarité, la réponse au signal $\sin(\omega \cdot t)$ sera simplement donnée par

$$\Im\{y(t)\}$$

$y(t)$ étant la réponse du système à $u(t) = e^{j \cdot \omega \cdot t}$. Sachant que $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, on a :

$$Y(s) = G(s) \cdot \underbrace{U(s)}_{\mathcal{L}\{e^{j \cdot \omega \cdot t}\}} = G(s) \cdot \frac{1}{s - j \cdot \omega}$$

$G(s)$ étant une fraction rationelle en s

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0}$$

on a

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0} \cdot \frac{1}{s - j \cdot \omega}$$

puis, en décomposant en éléments simples (on se restreint ici au cas de pôles disctincts, voir [1] pour le traitement du cas général où les pôles peuvent être multiples)

$$Y(s) = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2} + \ldots + \frac{C_n}{s - s_n} + \frac{B}{s - j \cdot \omega}$$

où C_1 à C_n sont les *résidus* associés aux pôles s_1 à s_n, B étant celui correspondant au pôle $s = j \cdot \omega$. Les pôles $s_1, \ldots, s_n, j \cdot \omega$ sont ceux de la fraction rationnelle $Y(s)$, qui a $s_1, \ldots, s_n$ en commun avec $G(s)$.

La transformée de Laplace inverse de $Y(s)$ donne :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = C_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} + \ldots + C_n \cdot e^{s_n \cdot t} + B \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$$

On a donc, puisque $G(s)$ est stable :

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot e^{s_i \cdot t}}_{\to 0 \text{ pour } t \to \infty} + B \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \longrightarrow B \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$$

La réponse au signal complexe $e^{j \cdot \omega \cdot t}$ étant maintenant connue, on peut en déduire celle au signal réel $\sin(\omega \cdot t)$. On a :

$$\Im\{y(t)\} = \Im\{B \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\}$$

Le résidu B se calcule directement au moyen du théorème des résidus. On a, pour un pôle simple :

$$\begin{aligned} B &= \lim_{s \to j \cdot \omega} \left[G(s) \cdot U(s) \cdot (s - j \cdot \omega) \right] \\ &= \lim_{s \to j \cdot \omega} \left[\frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0} \cdot \frac{1}{s - j \cdot \omega} \cdot (s - j \cdot \omega) \right] \\ &= G(j \cdot \omega) \end{aligned}$$

On voit donc qu'un signal d'entrée sinusoïdal

$$u(t) = \sin(\omega \cdot t)$$

devient

$$\begin{aligned} \Im\{B \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\} &= \Im\{G(j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\} \\ &= \Im\{|G(j \cdot \omega)| \cdot e^{j \cdot \arg\{G(j \cdot \omega)\}} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\} \\ &= \Im\{|G(j \cdot \omega)| \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \arg\{G(j \cdot \omega)\})}\} \\ &= |G(j \cdot \omega)| \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg\{G(j \cdot \omega)\}) \end{aligned}$$

Le signal d'entrée $u(t) = \sin(\omega \cdot t)$ est donc :

– amplifié d'un facteur $A(\omega) = |G(j \cdot \omega)|$
– déphasé d'un angle égal à $\varphi(\omega) = \arg\{G(j \cdot \omega)\}$

La réponse harmonique du système dynamique linéaire $G(s)$ est donc entièrement décrite par le nombre complexe $G(j\cdot\omega)$, qui n'est autre que la fonction de transfert $G(s)$ évaluée sur l'axe imaginaire.

En conclusion, et en généralisant au cas de systèmes à pôles multiples, la réponse harmonique est obtenue en évaluant la fonction de transfert $G(s)$ pour $s = j \cdot \omega$. On a :

$$\boxed{G(s)|_{s=j\cdot\omega} = G(j \cdot \omega) \qquad \begin{cases} A(\omega) = |G(j \cdot \omega)| \\ \varphi(\omega) = \arg\{G(j \cdot \omega)\} \end{cases}}$$

6.2.2 Représentation graphique de la réponse harmonique $G(j \cdot \omega)$: lieu de Nyquist

Le lieu de Nyquist de la réponse harmonique $G(j \cdot \omega)$ consiste à tracer, dans le plan complexe $\Re\{G(j \cdot \omega)\} - \Im\{G(j \cdot \omega)\}$, la courbe décrite par le nombre complexe $G(j \cdot \omega) = |G(j \cdot \omega)| \cdot e^{j \cdot \arg\{G(j \cdot \omega)\}}$ pour ω variant de 0 à l'∞. On dit que le lieu de Nyquist est la *représentation polaire* de $G(j \cdot \omega)$.

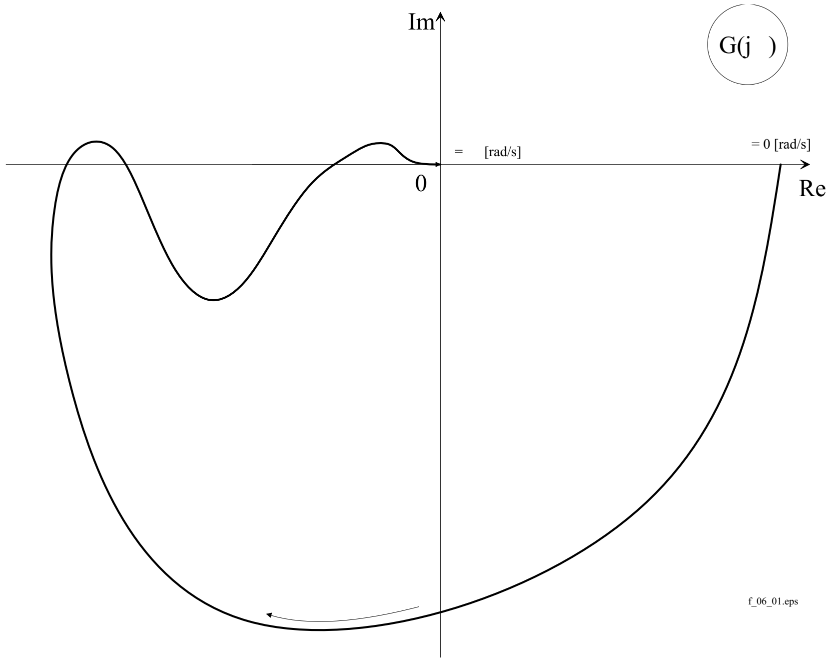


FIG. 6.2 – Exemple de lieu de Nyquist. Le lieu est gradué en valeurs de ω et et orienté vers les ω croissant (fichier source).

Le lieu doit être gradué en valeurs de ω et orienté vers les ω croissant. On fera bien de se rappeler que tout système physique finit par atténuer et déphaser les signaux. Pour $\omega \rightarrow \infty$, le gain $A(\omega)$ tend vers zéro (donc le lieu finit à l'origine du plan complexe) et la phase tend vers une valeur < 0 [°].

En pratique, ce type de représentation n'est que peu utilisé. On préfère la représentation par le diagramme de Bode.

Exemple

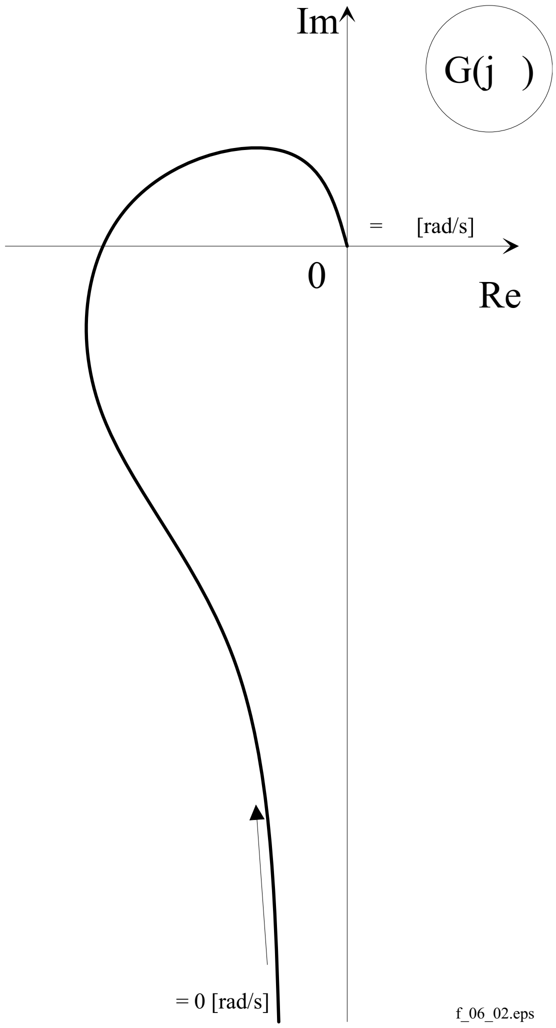


FIG. 6.3 – Esquisse du lieu de Nyquist de $G(j \cdot \omega) = \frac{K_0}{j \cdot \omega} \cdot \frac{1}{(1+ j \cdot \omega \cdot T_1) \cdot (1+ j \cdot \omega \cdot T_2)}$ (fichier source).

Soit à esquisser le lieu de Nyquist de la réponse harmonique d'un système ayant pour fonction de transfert

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s} \cdot \frac{1}{(1 + s \cdot T_1) \cdot (1 + s \cdot T_2)}$$

La réponse harmonique est obtenue en substituant $j \cdot \omega$ à s :

$$G(j \cdot \omega) = \frac{Y(j \cdot \omega)}{U(j \cdot \omega)} = \frac{K}{j \cdot \omega} \cdot \frac{1}{(1 + j \cdot \omega \cdot T_1) \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot T_2)}$$

Pour tracer précisément le lieu de Nyquist, il faut calculer $|G(j \cdot \omega)|$ et $\arg \{G(j \cdot \omega)\}$ pour plusieurs valeurs de ω.

Si l'on se contente d'une esquisse, il suffit souvent de calculer les points particuliers correspondant à $\omega \to 0 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ et $\omega \to \infty \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$. Dans le cas de l'exemple, on a :

$$\begin{array}{lll}
\lim_{\omega \to 0} G(j \cdot \omega) = \frac{K}{j \cdot \omega} & \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{lll} |G\,(j \cdot \omega)| & \longrightarrow & \infty \\ \arg \{G(j \cdot \omega)\} & \longrightarrow & -90 \ [°] \end{array} \right. \\
\lim_{\omega \to \infty} G(j \cdot \omega) = \frac{\frac{K}{T_1 \cdot T_2}}{(j \cdot \omega)^3} & \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{lll} |G\,(j \cdot \omega)| & \longrightarrow & 0 \\ \arg \{G(j \cdot \omega)\} & \longrightarrow & -270 \ [°] \end{array} \right.
\end{array}$$

On peut alors esquisser le lieu de Nyquist 6.3 page précédente. L'inspection de la fonction de transfert $G(s)$ permet de relier les 2 points calculés ci-dessus : le système est constitué d'un intégrateur ($\frac{1}{s}$) et de 2 constantes de temps ($\frac{1}{1+s \cdot T_1}$ et $\frac{1}{1+s \cdot T_1}$). En conséquence, le gain de $G(j \cdot \omega)$ ne peut que diminuer, tout comme sa phase.

6.2.3 Représentation graphique de la réponse harmonique $G(j \cdot \omega)$: diagramme de Bode

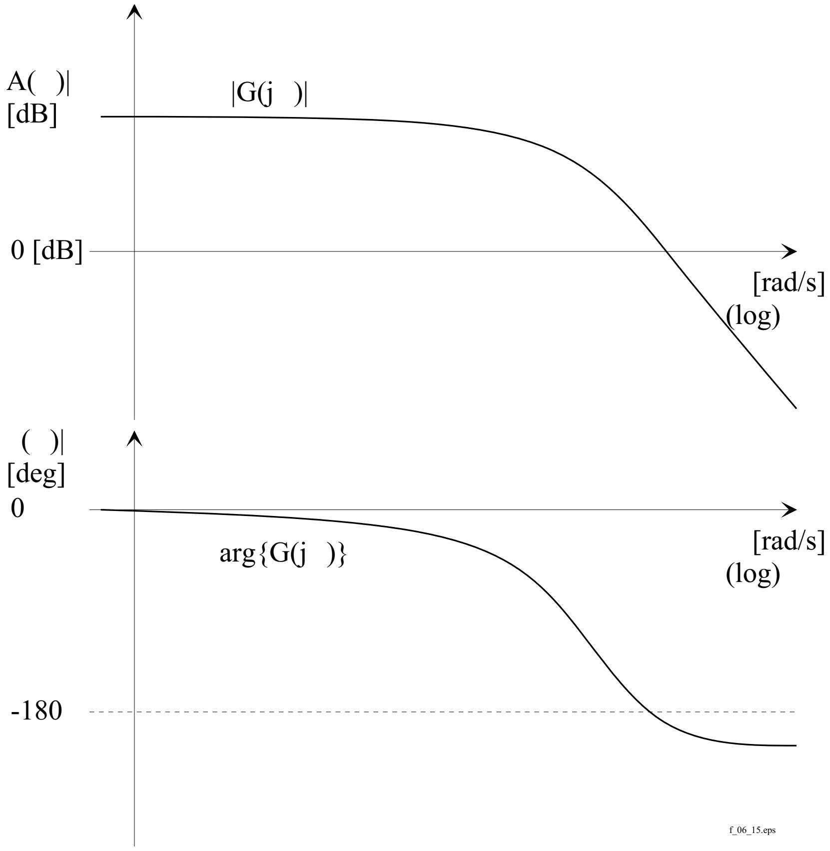


FIG. 6.4 – Diagramme de Bode d'un système de fonction de transfert $G(s)$ (fichier source).

La représentation de Bode (figure 6.4) consiste à tracer séparément
– le gain $A(\omega) = |G(j \cdot \omega)|$ en décibels ([dB]) : $A(\omega)|_{\mathsf{dB}} = 20 \cdot \log\left(|G(j \cdot \omega)|\right)$
– la phase $\varphi(\omega) = \arg\left\{G(j \cdot \omega)\right\}$ en degrés ([°]) ou radians

en fonction de la pulsation ω représentée sur une échelle logarithmique. On relèvera que dans le contexte des problèmes d'automatique, il est **nécessaire** de représenter ces 2 grandeurs (notamment lorsque le système considéré est à déphasage non-minimal ou à retard pur), de surcroît sur une même page et pour la même gamme de pulsations. Cela s'avérera évident lorsqu'il s'agira d'appliquer le critère de stabilité de Nyquist et de mesurer les marges de phase φ_m et A_m (§ 6.8.3 page 235).

Un avantage déterminant de ce type de représentation est la facilité avec laquelle des esquisses relativement précises peuvent être faites : grâce à l'échelle

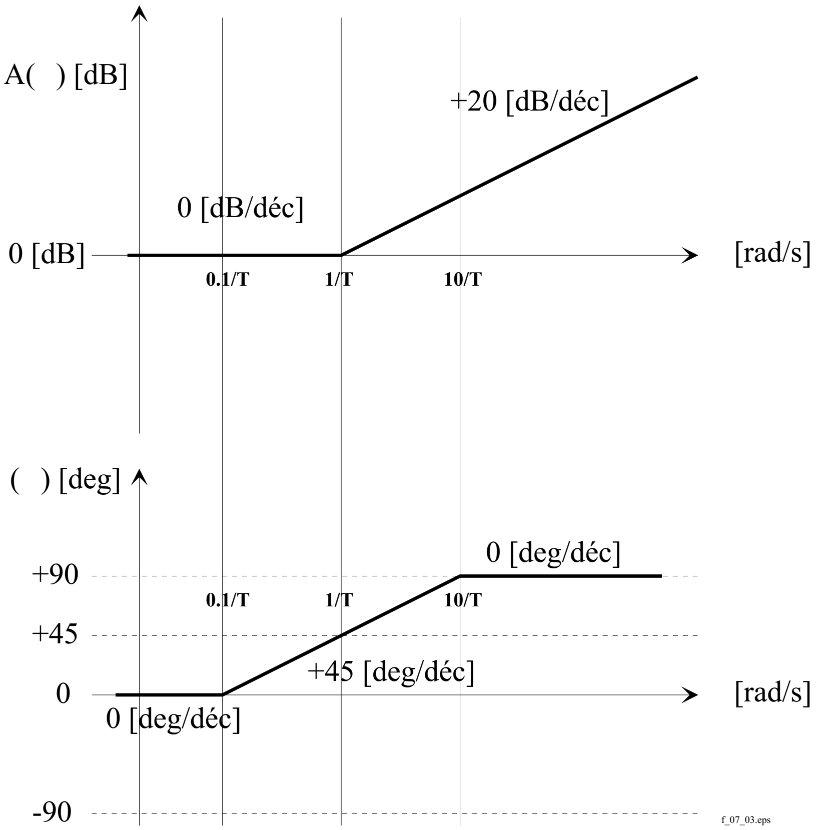


FIG. 6.5 – Diagramme de Bode asymptotique de $(1+j\cdot\omega\cdot T)$. La routine bodeme, développée à l'*eivd*, permet de tracer les asymptotes sous MATLAB (fichier source).

logarithmique, des asymptotes des courbes de gain et de phase peuvent facilement être tracées. On rappelle qu'un élément dynamique de la forme

$$G_1(j\cdot\omega) = 1 + j\cdot\omega\cdot T$$

peut être représenté (figure 6.5) par

- une asymptote horizontale jusqu'à la pulsation caractéristique $\omega_p = \frac{1}{T}$
- une asymptote oblique à partir de $\frac{1}{T}$ ayant une pente de $20\left[\frac{\text{dB}}{\text{décade}}\right] = 6\left[\frac{\text{dB}}{\text{octave}}\right]$

pour le gain, et

- une asymptote horizontale jusqu'à $\frac{0.1}{T}$
- une asymptote oblique de $\frac{0.1}{T}$ à $\frac{10}{T}$ ayant une pente de $45\left[\frac{\circ}{\text{décade}}\right]$
- une asymptote horizontale dès $\frac{10}{T}$

pour la phase.

L'un des avantages de la représentation logarithmique se traduit par le fait

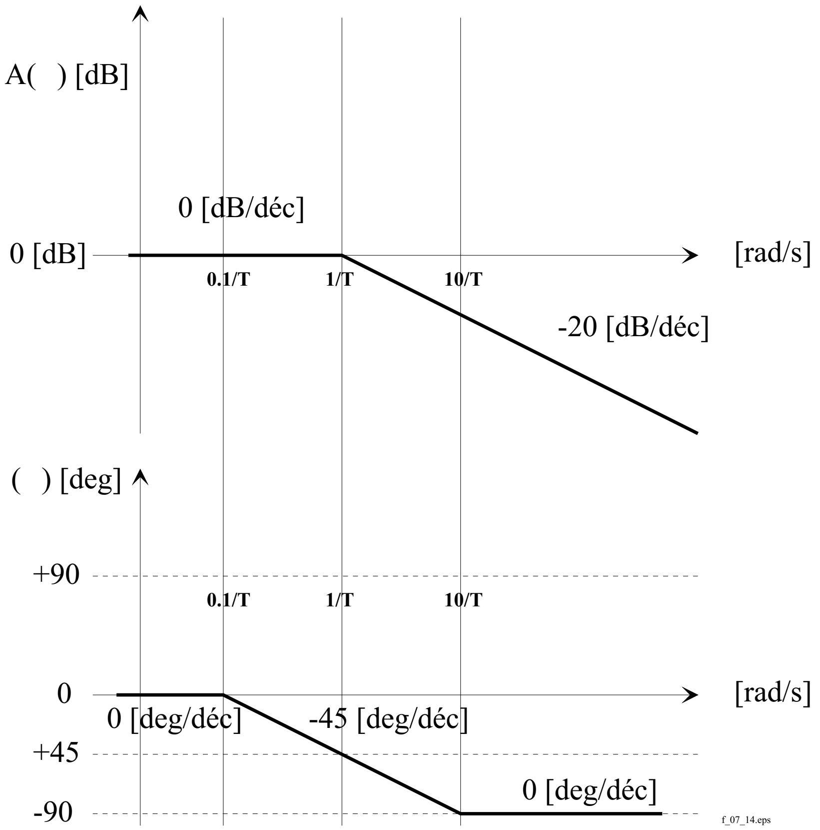


Fig. 6.6 – Diagramme de Bode asymptotique de $G_2(j \cdot \omega) = \frac{1}{1+j\cdot\omega\cdot T}$, facilement déduit du diagramme de Bode de $G_1(j \cdot \omega) = (1 + j \cdot \omega \cdot T)$ (figure 6.5 page précédente) car $|G_2|_{\mathsf{dB}} = -|G_1|_{\mathsf{dB}}$ et $\arg\{G_2\} = -\arg\{G_1\}$ (fichier source).

que le diagramme de Bode de

$$G_2(j \cdot \omega) = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot T}$$

(figure 6.6) peut facilement se déduire du précédent, puisque pour le gain on a

$$|G_2| = \left|\frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot T}\right| = \frac{1}{|G_1|}$$

$$20 \cdot \log(|G_2|) = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{|G_1|}\right) = -20 \cdot \log(|G_1|)$$

$$|G_2|_{\mathsf{dB}} = -|G_1|_{\mathsf{dB}}$$

et de même pour la phase

$$\arg\{G_2\} = \arg\left\{\frac{1}{1+j\cdot\omega\cdot T}\right\} = -\arctan(\omega\cdot T)$$
$$\arg\{G_1\} = \arg\{1+j\cdot\omega\cdot T\} = \arctan(\omega\cdot T)$$
$$\arg\{G_2\} = -\arg\{G_1\}$$

Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs typiques de gain en [dB] et leur équivalent linéaire. On voit que partant d'un gain en [dB] apparemment difficile à évaluer sans calculatrice, on peut en fait aisément obtenir le gain linéaire correspondant. Par exemple : un gain de $-34\,[\mathrm{dB}]$ correspond à $0.02 = \frac{1}{50}$, car $-34\,[\mathrm{dB}] = -40\,[\mathrm{dB}] + 6\,[\mathrm{dB}] = 0.01\cdot 2$.

Valeur [dB]	**Gain linéaire)** (exact ou approximatif)	**Calcul, remarque**
0	1	$20\cdot\log(\lvert 1\rvert)$
20	10	$20\cdot\log(\lvert 10\rvert)$
-20	0.1	$20\cdot\log\left(\left\lvert\frac{1}{10}\right\rvert\right) = -20\cdot\log(\lvert 10\rvert)$
3	$\sqrt{2}\approx 1.414$	
-3	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$	
6	2	$3\,[\mathrm{dB}] + 3\,[\mathrm{dB}] = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$
-6	0.5	$-3\,[\mathrm{dB}] - 3\,[\mathrm{dB}] = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$
10	3	une demi-décade
-23	0.0707	$-20\,[\mathrm{dB}] - 3\,[\mathrm{dB}] = 0.1\cdot 0.7071 = 0.0707$
17	7.07	$20\,[\mathrm{dB}] - 3\,[\mathrm{dB}] = 10\cdot 0.7071 = 7.07$
13	4.23	$10\,[\mathrm{dB}] + 3\,[\mathrm{dB}] = 3\cdot 1.41 = 4.23$
30	30	$20\,[\mathrm{dB}] + 10\,[\mathrm{dB}]$
40	100	$20\,[\mathrm{dB}] + 20\,[\mathrm{dB}]$
50	300	$40\,[\mathrm{dB}] + 10\,[\mathrm{dB}]$
56	600	$40\,[\mathrm{dB}] + 10\,[\mathrm{dB}] + 6\,[\mathrm{dB}]$
60	1000	$20\,[\mathrm{dB}] + 20\,[\mathrm{dB}] + 20\,[\mathrm{dB}]$
etc		

6.3 Esquisse du diagramme de Bode en boucle fermée, régulation de correspondance

En régulation automatique, l'analyse harmonique est une méthode très pratiquée, notamment sur la fonction de transfert en boucle ouverte $G_o(s)$. La raison principale est bien sûr l'existence du fameux critère de Nyquist présenté au § 6.8.2 page 230, dont l'application permet de déterminer la stabilité en **boucle fermée** d'un système contre-réactionné sur la base de sa réponse harmonique en **boucle ouverte**. Celle-ci offre la possibilité d'évaluer la stabilité, et surtout le degré de stabilité du système en boucle fermée en mesurant puis en ajustant par différentes méthodes les marges de gain A_m et de phase φ_m.

Toutefois, du point de vue de l'utilisateur d'un système de régulation automatique, ce sont essentiellement les performances en boucle fermée qui sont intéressantes. Même si le degré de stabilité de l'installation est une grandeur qu'il prendra en compte, l'utilisateur sera plus intéressé à connaître les réponses temporelle ou harmonique en boucle fermée.

L'obtention du lieu de transfert exact en boucle fermée à partir de $G_o(j \cdot \omega)$ nécessite de nombreux calculs. L'emploi d'un ordinateur facilite évidemment la tâche puisqu'avec un tel outil, le diagramme de Bode en boucle fermée peut être obtenu de manière quasi instantanée (figure 6.7).

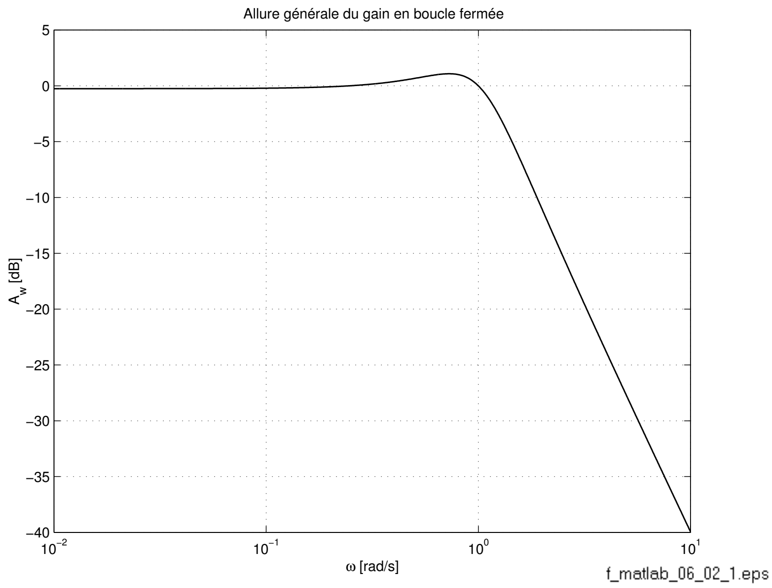


FIG. 6.7 – Obtention du diagramme de Bode en boucle fermée par calcul explicite de $G_w(j \cdot \omega) = \frac{Y(j\cdot\omega)}{W(j\cdot\omega)} = \frac{G_o(j\cdot\omega)}{1+G_o(j\cdot\omega)}$ (fichier source).

Cependant, savoir esquisser rapidement ce lieu est tout aussi utile que facile. On présente ici une façon de procéder pour obtenir l'allure générale de

$$G_w(j\cdot\omega) = \frac{Y(j\cdot\omega)}{W(j\cdot\omega)} = \frac{G_o(j\cdot\omega)}{1+G_o(j\cdot\omega)}$$

dans le cas d'un retour unitaire (l'adaptation au cas du retour non-unitaire est élémentaire, voir chap.3.

Le système de régulation automatique étant excité par des consignes $w(t)$ de forme sinusoïdale et de pulsations ω variables en vue d'en obtenir la réponse harmonique, il faut s'attendre ce que la grandeur réglée $y(t)$ poursuivre quasi parfaitement $w(t)$ en basse fréquence, jusqu'à une certaine pulsation limite ω_B. Dans cette zone, on aura donc :

$$G_w(j\cdot\omega) = \frac{Y(j\cdot\omega)}{W(j\cdot\omega)} \approx 1 \,\text{pour}\, 0 \,\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] < \omega \ll \omega_B$$

Le gain en boucle fermée est ainsi voisin de l'unité, le régulateur étant assez "fort" pour maintenir l'erreur $e(t) = w(t) - y(t)$ proche de zéro.

A partir de ω_B, le système de régulation automatique n'est plus capable de poursuivre une consigne devenue trop rapide pour lui. L'amplitude de la grandeur réglée $y(t)$ diminue avec la fréquence, signifiant que le gain en boucle fermée décroît. Il devient nettement inférieur à 1, sa valeur idéale.

Partant de ces considérations, en se souvenant que

$$G_w(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)}$$

$$G_w(j\cdot\omega) = \frac{G_o(j\cdot\omega)}{1+G_o(j\cdot\omega)}$$

$$|G_w(j\cdot\omega)| = \frac{|G_o(j\cdot\omega)|}{|1+G_o(j\cdot\omega)|}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} &|G_o(j\cdot\omega)| \gg 1 && \text{pour } 0 < \omega \ll \omega_B \\ &|G_o(j\cdot\omega)| \ll 1 && \text{pour } \omega \gg \omega_B \end{aligned}$$

et donc que

$$\begin{aligned} G_w(j\cdot\omega) &= \frac{G_o(j\cdot\omega)}{1+G_o(j\cdot\omega)} \approx 1 && \text{pour } 0 < \omega \ll \omega_B \\ G_w(j\cdot\omega) &= \frac{G_o(j\cdot\omega)}{1+G_o(j\cdot\omega)} \to G_o(j\cdot\omega) && \text{pour } \omega \gg \omega_B \end{aligned}$$

A haute fréquence, au-delà de ω_B, le gain en boucle fermée $|G_w(j \cdot \omega)|$ tend vers celui en boucle ouverte $|G_o(j \cdot \omega)|$, comme l'illustre la figure 6.8 :

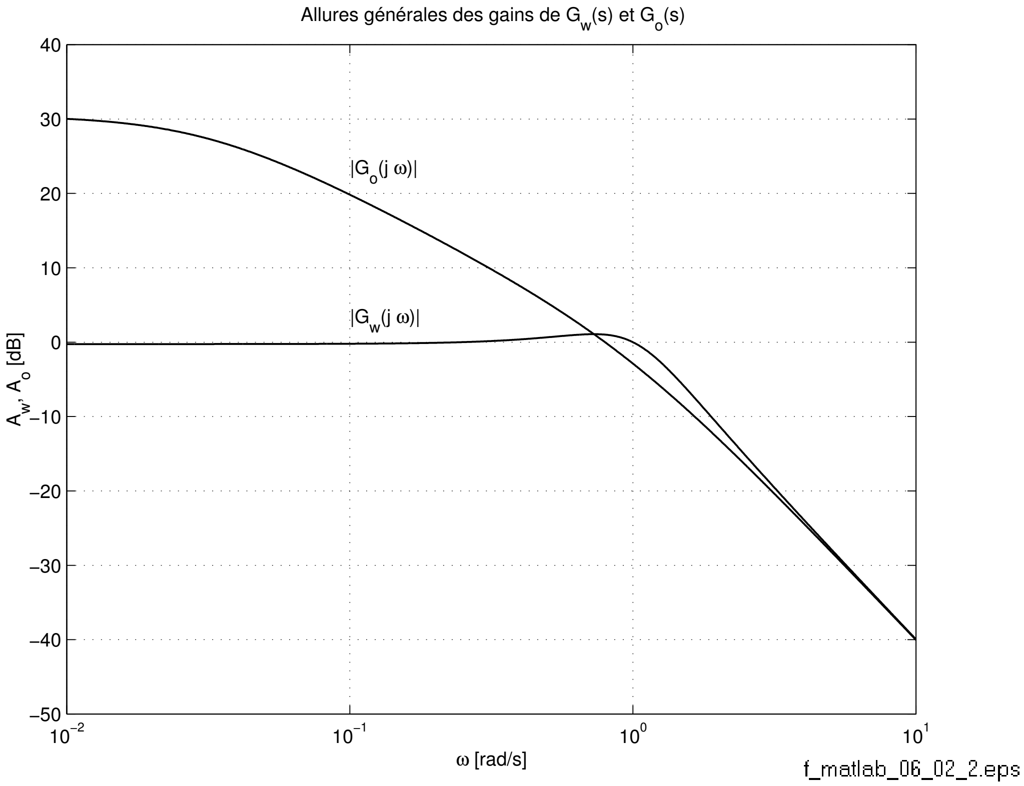


FIG. 6.8 – Obtention de l'allure du diagramme de Bode en boucle fermée à partir de celui en boucle ouverte (fichier source).

Entre ces deux valeurs extrêmes, l'allure de $G_w(j \cdot \omega)$ peut varier considérablement, en particulier en fonction du taux d'amortissement ζ (cas d'un système à pôles dominants). Des calculs sont nécessaires pour tracer $G_w(j \cdot \omega)$ dans la zone située immédiatement autour de ω_B. Pour $\zeta = 0.5$, le gain à la résonance est de l'ordre de 2.3 [dB].

6.4 Bande passante en boucle fermée

La pulsation ω_B mentionnée au paragraphe précédent n'est autre que la **bande passante** du système en boucle fermée. Elle est mesurée lorsque (figure 6.9 page suivante)

$$|G_w(j \cdot \omega)| = -3 \text{ [dB]}$$

ou

$$|G_w(j \cdot \omega)| = -6\,[\mathrm{dB}]$$

selon les normes employées. C'est une grandeur très importante pour l'utilisateur, complémentaire aux données que sont la durée de réglage T_{reg} et le temps de montée T_m.

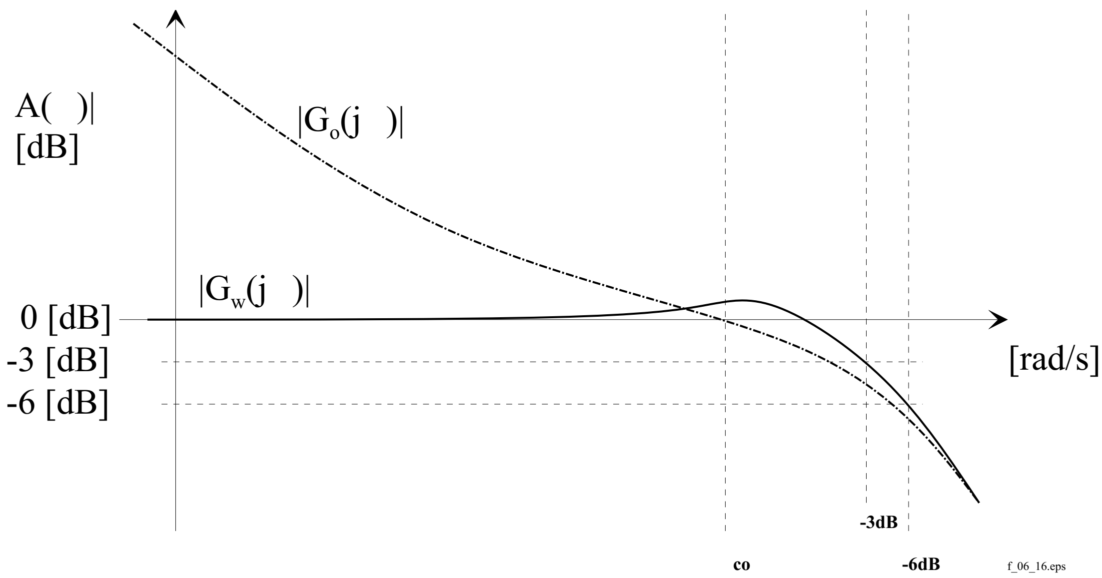


FIG. 6.9 – Définition des bandes passantes en boucle fermée $\omega_{-3\mathrm{dB}}$ et $\omega_{-6\mathrm{dB}}$ ainsi que de la pulsation de coupure à $0\,[\mathrm{dB}]$ en boucle ouverte ω_{co} (fichier source).

6.5 Allure typique du diagramme de Bode en boucle ouverte

De façon à ce que le gain $G_w(j \cdot \omega)$ soit aussi proche de 1, il faut que $G_o(j \cdot \omega)$ soit aussi grand que possible. Le dilemme stabilité-précision d'une part, la nature physique du système à régler ainsi que des contraintes techniques (filtrage des bruits, limites de la commande, etc) font qu'à partir d'une certaine pulsation $\omega_{co} \approx \omega_B$, le gain de boucle $G_o(j \cdot \omega)$ devient inférieur à l'unité. ω_{co} est la **pulsation de coupure à** $0\,[\mathrm{dB}]$ **en boucle ouverte** (figure 6.9).

Typiquement, le lieu de Bode du gain de $G_o(j \cdot \omega)$ est donc élevé à basse fréquence, i.e. pour $\omega \ll \omega_{co}$ et faible au-delà de cette limite (figure 6.10 page ci-contre).

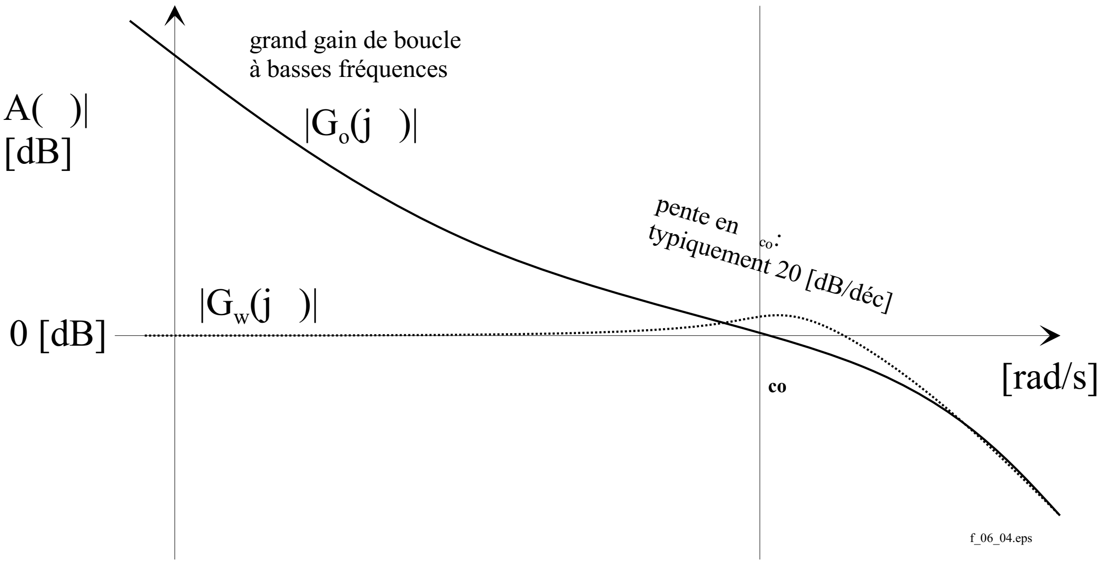


FIG. 6.10 – Allure typique du diagramme de Bode (gain seulement) en boucle ouverte (fichier source).

6.6 Valeur approximative de la durée de réglage T_{reg}

La durée de réglage en boucle fermée, pour un système ayant une paire de pôles dominants, peut être évaluée de manière approximative par la relation ([1], §6.8.4, formule (6.42)) :

$$\boxed{\omega_{co} \cdot T_{\text{reg}} \approx \pi}$$

La relation ci-dessous est d'un intérêt pratique considérable : partant de la durée de réglage T_{reg}, connue relativement tôt dans le déroulement d'un projet, on peut immédiatement en déduire la valeur approximative de ω_{co}. Or, le critère de stabilité de Nyquist (§ 6.8.2 page 230) montre que c'est justement dans la zone de pulsations où le gain de boucle est unitaire, i.e. dans la zone située autour de ω_{co}, que la réponse harmonique et par suite le modèle doivent être connus précisément. On sait alors dans quel domaine de fréquences l'effort de modélisation et d'identification doit être porté et l'on peut également en déduire les dynamiques (i.e. les pôles/constantes de temps) qu'il est possible de négliger dans ce même modèle (figure 6.11 page suivante).

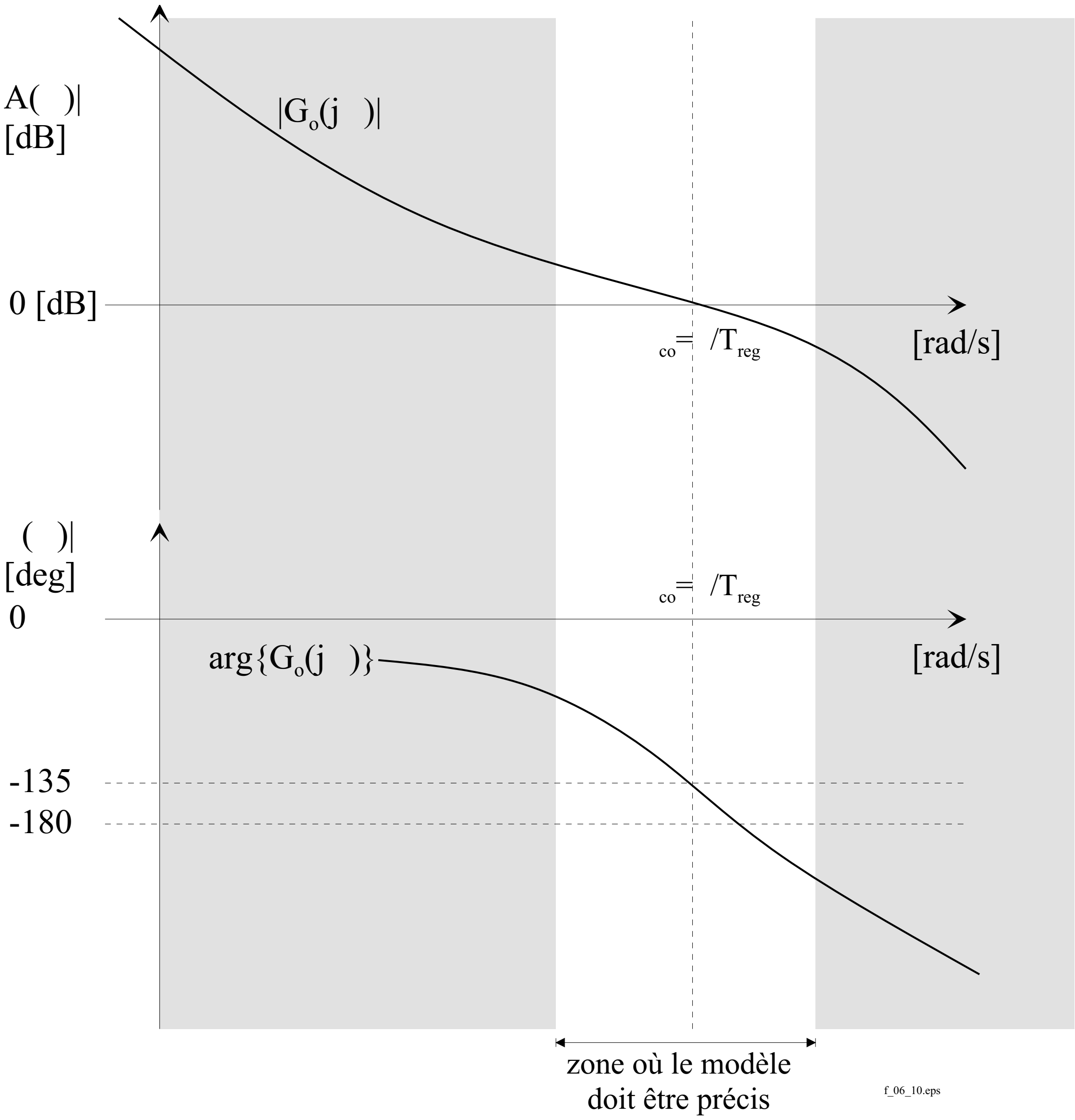


FIG. 6.11 – Connaissant la durée de réglage T_{reg} de l'application, on peut estimer la valeur nécessaire de la pulsation coupure ω_{co} à 0 [dB] en boucle ouverte. Cette information permet ensuite de fixer le domaine de pulsation dans le lequelle la modélisation et/ou l'identification devront être effectuées avec un soin particulier, la précision du modèle au voisinage de ω_{co} étant nécessaire pour satisfaire le critère de Nyquist (fichier source).

6.7 Systèmes à retard pur

La fonction de transfert $G(s)$ d'un système possédant un retard pur de valeur T_r se distingue par la présence d'un terme

$$e^{-s \cdot T_r}$$

On a donc

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \overbrace{\frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0}}^{\text{partie rationnelle}} \cdot e^{-s \cdot T_r} \\ &\qquad \propto e^{-s \cdot T_r} \end{aligned}$$

La réponse harmonique $G(j \cdot \omega)$ de $G(s)$ se compose donc d'une partie rationnelle en $j \cdot \omega$

$$\frac{b_m \cdot (j \cdot \omega)^m + b_{m-1} \cdot (j \cdot \omega)^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot j \cdot \omega + b_0}{(j \cdot \omega)^n + a_{n-1} \cdot (j \cdot \omega)^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot j \cdot \omega + a_0}$$

ainsi que de la contribution

$$e^{-j \cdot \omega \cdot T_r}$$

Concernant cette dernière, on a :

$$\begin{cases} \left| e^{-j \cdot \omega \cdot T_r} \right| = 1 = 0\,[\mathrm{dB}] \\ \arg\left\{ e^{-j \cdot \omega \cdot T_r} \right\} = -\omega \cdot T_r \end{cases}$$

Le retard pur n'influence donc pas le gain du système $G(s)$; en revanche, avec la contribution

$$\boxed{\arg\left\{ e^{-j \cdot \omega \cdot T_r} \right\} = -\omega \cdot T_r}$$

il modifie la phase de manière **linéaire**, i.e. les harmoniques du signal d'entrée $u(t)$ sont déphasées d'un angle proportionnel à leur pulsation ω (figure 6.12 page suivante.

Contrairement à la partie rationnelle de $G(j \cdot \omega)$, composée d'éléments fondamentaux d'ordre 1 et 2, le déphasage amené par un retard pur ne tend pas vers une valeur asymptotique (par exemple -90 [°], -270 [°], etc), mais croît indéfiniment avec la pulsation ω. Notons que l'échelle logarithmique employée pour représenter la pulsation sur les diagrammes de Bode tend à masquer la linéarité du déphasage (figure 6.13 page suivante). Le fait que le déphasage des harmoniques soit linéaire avec la pulsation ω explique pourquoi un élément de type retard pur ne déforme pas les signaux : chacune des harmoniques étant déphasée proportionnellement à sa fréquence, leur superposition produit le même signal, simplement retardé

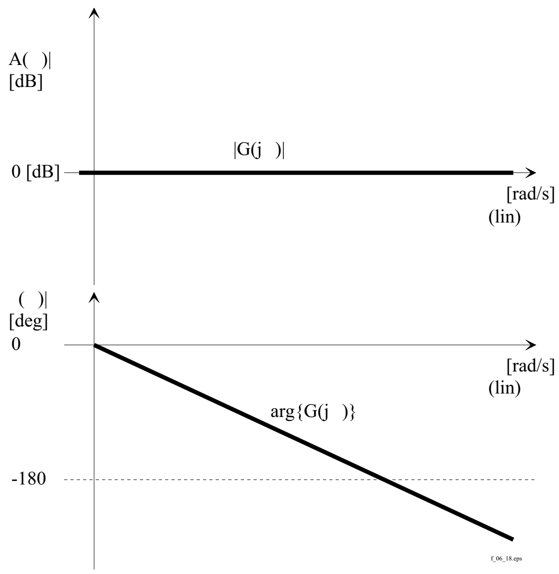


FIG. 6.12 – Réponse harmonique d'un retard pur, en échelle de pulsations **linéaire** (comparer avec figure 6.13) (fichier source).

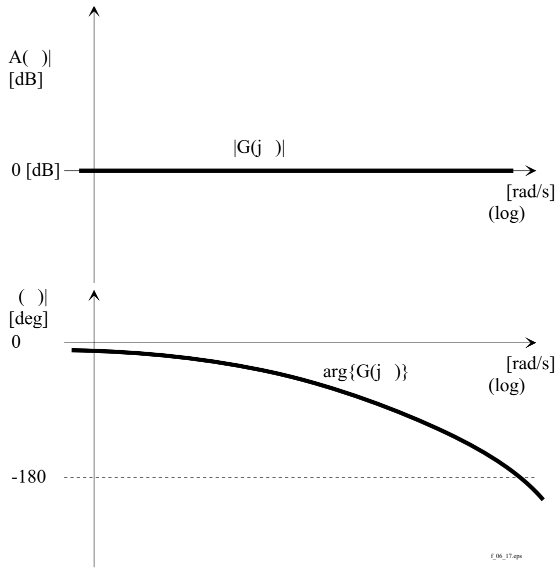


FIG. 6.13 – Diagramme de Bode d'un retard pur. C'est le fait que l'échelle de ω soit logarithmique qui explique la forme de la courbe de phase (comparer avec figure 6.12) (fichier source).

de T_r. Des filtres analogiques à phase plutôt linéaire sont ceux de Bessel. Dimensionner un système asservi de manière à ce que ses pôles dominants aient les caractéristiques des filtres de Bessel permet depoursuivre des consignes en réduisant la déformation.

6.7.1 Exemple

On considère le système asservi (régulation automatique de la pression du gaz d'aide (N_2) à la découpe laser) ayant pour fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G_o(s) = \frac{1.52}{(1 + s \cdot 0.6 \cdot s)^2} \cdot e^{-s \cdot 0.5}$$

La réponse indicielle est donnée ci-dessous (figure 6.14).

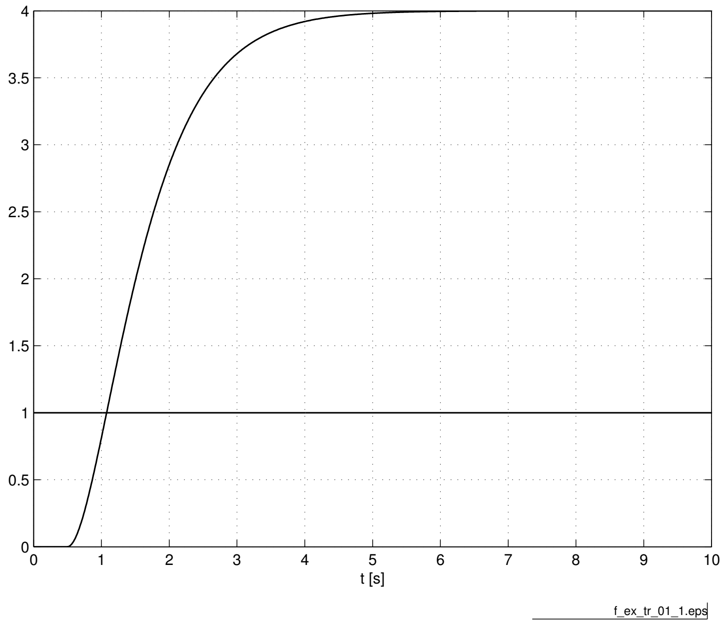


FIG. 6.14 – Réponse indicielle d'un système possédant retard pur (fichier source).

Pour en tracer le diagramme de Bode avec MATLAB , on doit procéder en 2 temps :

1. Calculer la réponse harmonique de la partie rationnelle, i.e. de $\frac{1.52}{(1+ s \cdot 0.6 \cdot s)^2}$, à l'aide de la fonction bode

```
%       Reponse harmonique
omega = logspace(-2,1,1000)';        %Pulsations
[AGo, phi] = bode(numGo, denGo, omega);     %Partie rationnelle
```

2. Y ajouter la contribution du retard pur , soit $-\omega \cdot 0.5$ [s] :

```
phiGo = phi - rad2deg(omega*Tr);     %Correction de la phase de Go
```

On peut alors tracer le diagramme de Bode, soit avec les fonctions de base comme **semilogx** ou en utilisant la fonction *eivd* bode_aff :

```
figure
bode_aff(AGo, phiGo, omega)
```

Le résultat est donné sur la figure 6.15.

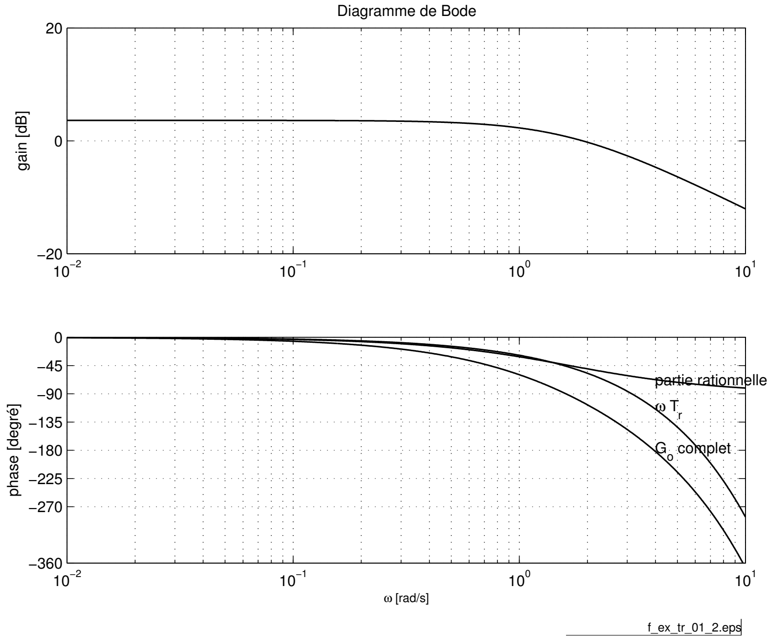


FIG. 6.15 – Réponse harmonique d'un système possédant retard pur (fichier source).

6.8 Etude de la stabilité par la réponse harmonique : critère de Nyquist

Le critère de Nyquist permet de déterminer la stabilité d'un système bouclé sur la base de sa réponse harmonique en boucle ouverte. Celle-ci comprenant la contribution du système à régler, dont la réponse harmonique peut être obtenue expérimentalement au moyen des outils offerts par la théorie de l'identification ([10], chap.8), le critère de Nyquist présente un grand intérêt pratique.

6.8.1 Critère de Nyquist généralisé

Théorème de Cauchy ou principe de l'argument

Soit (figure 6.16)
- C un contour simple du plan de s orienté dans le sens trigonométrique
- $F(s)$ une fraction rationnelle en s n'ayant ni pôle, ni zéro sur C

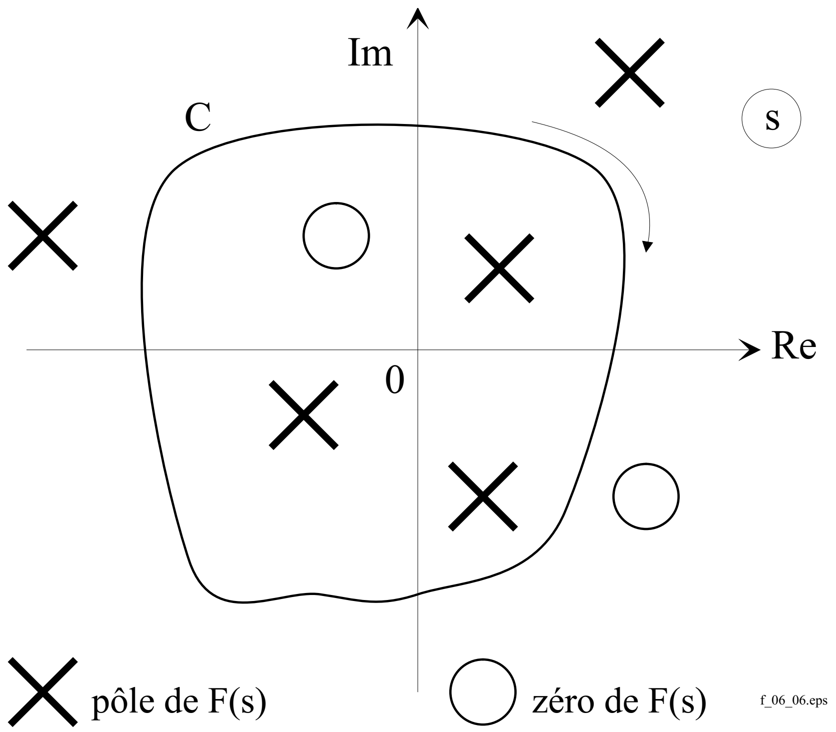


FIG. 6.16 – Contour C orienté du plan de s. $Z = 1$ et $P = 3$ dans cet exemple (fichier source).

P et Z représentant respectivement le nombre de pôles et de zéros de $F(s)$ situés à l'*intérieur* de la surface définie par C, le théorème de Cauchy, ou principe de l'argument, indique que

$$\Delta \arg \{F(s)\}_C = 2 \cdot \pi \cdot (Z - P)$$

i.e., la variation de l'argument de l'image $F(s)$ du contour C est égale $(Z - P)$ [tour] (figure 6.17), soit encore, la courbe image $F(s)$ lorsque s parcourt le contour C entoure $(Z - P)$ fois l'origine du plan complexe.

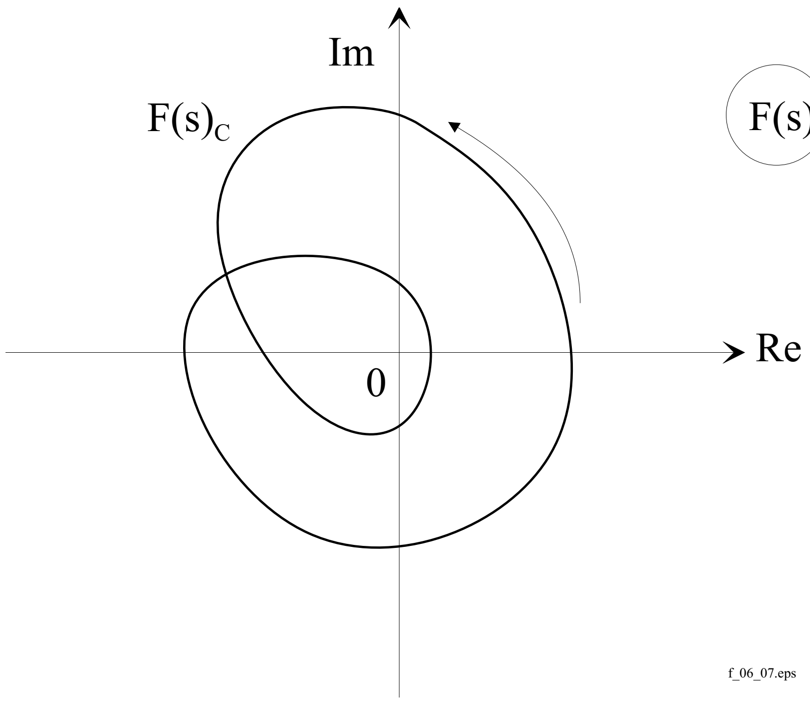


Fig. 6.17 – Image du contour C par la fonction $F(s)$: la courbe obtenue, selon le principe de l'argument, entoure l'origine $(Z - P)$ fois. Ici (figure 6.16 page précédente), $Z = 1$ et $P = 3$, donc la variation de l'argument est $1 - 3 = -2$, soit -2 [tour] (fichier source).

Contour de Bromwhich

Pour démontrer le critère de Nyquist généralisé, on commence par construire dans le plan de s un chemin fermé C, orienté, entourant la zone instable, i.e. tout le demi-plan complexe droit. Il s'agit du contour de Bromwhich (figure 6.18 page suivante).

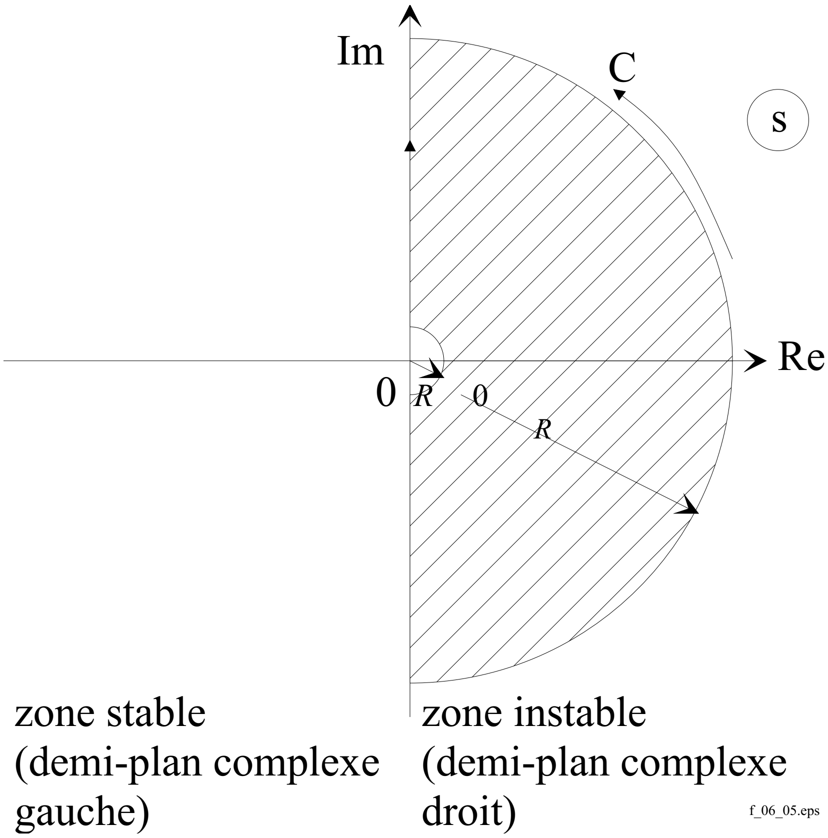


FIG. 6.18 – Contour C, appelé contour de Bromwhich, entourant la zone instable du plan de s (fichier source).

Afin de pouvoir mettre en application le théorème de Cauchy présenté au paragraphe précédent en respectant l'hypothèse que $F(s)$ n'a ni pôle, ni zéro cu C, on fait en sorte que ce contour évite le point $s = 0$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$, au moyen de deux quarts de cercle infinitésimaux.

En effet, les fonctions de transfert en boucle ouverte rencontrées dans les applications d'automatique ayant très souvent un voire plusieurs pôles en $s = 0$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$, i.e. ayant souvent un comportement intégrateur voire même double intégrateur, l'utilisation du théorème de Cauchy ne serait pas possible sans faire usage de cet artifice mathématique.

Démonstration du critère de Nyquist généralisé

La démonstration du critère de Nyquist généralisé fait usage du théorème de Cauchy en prenant le contour de Bromwhich en guise de contour simple orienté C et $(1 + G_o(s))$ en qualité de fraction rationnelle $F(s)$.

Considérons la fraction rationnelle en s dont les numérateurs et dénominateurs n'ont pas de facteurs communs (les simplifications pôle-zéro ont été faites, i.e. la *réalisation est minimale*)

$$F(s) = 1 + G_o(s)$$

Cette expression n'est autre que le **dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée** $G_f(s)$ d'un système de régulation automatique ayant $G_o(s)$ pour fonction de transfert en boucle ouverte. Les zéros de $F(s)$ sont donc les pôles de $G_f(s)$, alors que ses pôles coïncident avec les pôles de $G_o(s)$:

- **zéros** de $F(s) = 1 + G_o(s)$ = **pôles** de $G_f(s) \propto \frac{1}{1+G_o(s)}$
- **pôles** de $F(s) = 1 + G_o(s)$ = **pôles** de $G_o(s)$

La stabilité en boucle fermée est assurée pour autant que tous les pôles de $G_f(s)$, i.e. les zéros de $F(s)$, soient situés dans le demi-plan complexe gauche.

Soient alors Z et P le nombre de zéros, respectivement le nombre de pôles de $F(s)$ ne répondant pas à cette condition, i.e. situés dans le demi-plan complexe droit :

- **Z** = nombre de zéros de $F(s) = 1 + G_o(s)$ situés en dehors du demi-plan complexe gauche = nombre de pôles de $G_f(s) \propto \frac{1}{1+G_o(s)}$ situés en dehors du demi-plan complexe gauche
- **P** = nombre de pôles de $F(s) = 1 + G_o(s)$ situés en dehors du demi-plan complexe gauche = nombre de pôles de $G_o(s)$ situés en dehors du demi-plan complexe gauche

On sait de la condition fondamentale de stabilité (§ 5.2.3 page 186) que pour que le système soit stable en boucle fermée, il faut impérativement que $Z = 0$.

Considérant le contour de Bromwhich C, l'application du théorème de Cauchy donne, lorsque $F(s) = 1 + G_o(s)$ n'a ni pôle, ni zéro sur C :

$$\Delta \arg \left\{1 + G_o(s)\right\}_C = 2 \cdot \pi \cdot (Z - P)$$

Pour que $G_f(s)$ soit stable, il faut que

$$Z = 0$$

ce qui implique que si le système est stable en boucle fermée, on doit avoir :

$$\arg \left\{1 + G_o(s)\right\}_C = -2 \cdot \pi \cdot P$$

Ce résultat est essentiel. Mais c'est sous une forme légèrement modifiée qu'on va le mettre en évidence. En effet, l'argument du nombre complexe

$$1 + G_o(s)$$

mesuré par rapport à l'origine étant égal à celui de

$$G_o(s)$$

mesuré par rapport au point $(-1 + j \cdot 0)$ (figure 6.19 page suivante), le critère de Nyquist peut s'énoncer comme suit :

Critère de Nyquist généralisé

Un système de régulation automatique linéaire, causal et stationnaire, dont la fonction de transfert en boucle ouverte $G_o(s)$ possède P pôles instables, est stable en boucle fermée si la courbe image $G_o(s)_C$ entoure $(-P)$ fois le point critique

$$-1 + j \cdot 0$$

lorsque s parcourt le contour de Bromwhich C défini sur la figure 6.16 page 223.

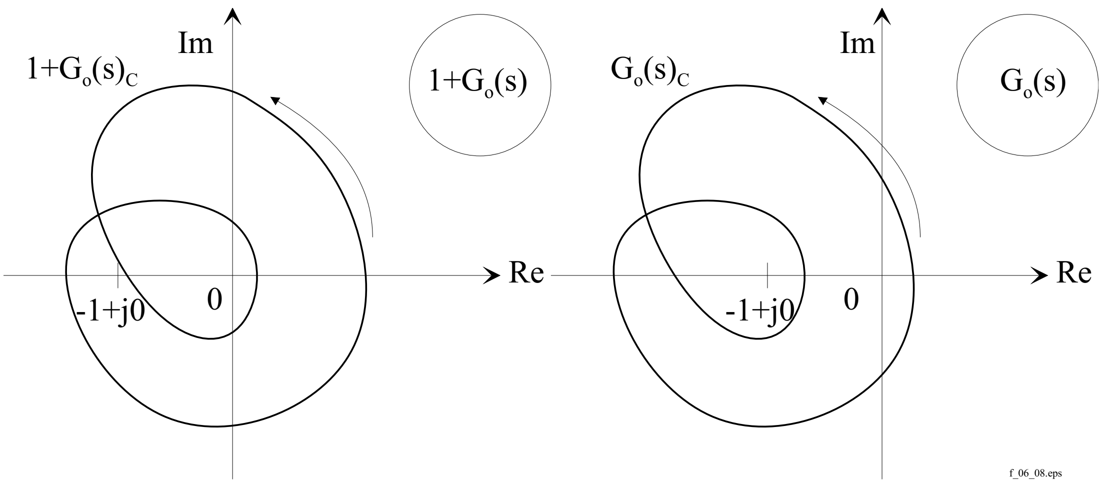


FIG. 6.19 – Mesurer le nombre de tours de la courbe image $F(s) = 1 + G_o(s)$ autour de l'origine est identique à mesurer le nombre de tours de la courbe image $F(s) = G_o(s)$ autour du point critique $-1 + j \cdot 0$ (fichier source).

Bien que ce critère s'applique à tous les types de systèmes, y compris ceux qui sont instables en boucle ouverte ($P \neq 0$), il est cependant très rarement utilisé dans le cas général. C'est essentiellement la version simplifiée de ce critère, présentée ci-après au § 6.8.2 page 230, qui est d'une grande utilité pratique. Comme on l'indiquera, cette version simplifiée n'est cependant applicable que pour des systèmes stables en boucle ouverte ($P = 0$).

Dès qu'un système est instable en boucle ouverte, la synthèse du régulateur s'effectue en effet de préférence dans le plan complexe (comme par exemple pour la suspension magnétique dans le cadre des laboratoires). Cette technique est présentée au chapitre 7.

Lieu de Nyquist complet

Les coefficients de $F(s) = 1 + G_o(s)$ étant réels, et le degré relatif $d = n - m$ étant supposé supérieur à zéro, l'image du contour de Bromwhich, i.e. l'allure de la courbe image $G_o(s)_C$ se décompose en trois portions, I, II et III ainsi qu'en leurs symétriques par rapport à l'axe réel.

Portion	Expression de s sur le contour de Bromwhich	Domaine de variation de s	Image $G_o(s)_C$
I	$s = R \cdot e^{j \cdot \vartheta}$	$0 \leq \vartheta \leq +\frac{\pi}{2}$ $R \to 0$ (quart de cercle infinitésimal)	$G_o(s) = \frac{b_0 \cdot s^m + \ldots + b_{m-1} \cdot s + b_m}{s^\alpha \cdot \left(s^{n-\alpha} + \ldots + a'_{n-\alpha-1} \cdot s + a'_{n-\alpha}\right)}$ $\to \frac{K}{\left(R \cdot e^{j \cdot \vartheta}\right)^\alpha} = \infty \cdot e^{-j \cdot \alpha \cdot \vartheta}$ L'image du contour évolue sur un arc de cercle de rayon infini, de l'argument 0 à $-\alpha \cdot \frac{\pi}{2}$.
II	$s = j \cdot \omega$	$0 \leq \omega < \infty$ (axe imaginaire)	$G_o(s) = G_o(j \cdot \omega)$ Il s'agit du lieu de Nyquist de $G_o(s)$, calculé entre ω=0 et $\omega \to \infty$
III	$s = r \cdot e^{j \cdot \vartheta}$	$\frac{\pi}{2} \geq \vartheta \geq 0$ $R \to \infty$ (quart de cercle de rayon ∞)	$G_o(s) \to \frac{1}{\left(R \cdot e^{j \cdot \vartheta}\right)^{n-m}} \to 0 \cdot e^{-j \cdot (n-m) \cdot \vartheta}$ Il s'agit de l'origine du plan complexe

Il ressort du tableau ci-dessus que pour appliquer le critère de Nyquist, il est suffisant de tracer les images des portions I et II du contour de Bromwhich, avec leurs symétriques, en vue de compter le nombre de tours que fait $G_o(s)$ autour du point critique. Le contour obtenu est l'image recherchée : il porte le nom de *lieu de Nyquist complet*. On voit que lorsque le système est de type intégrateur, le lieu de Nyquist complet est en partie formé d'un ou plusieurs quarts de cercle de rayon infini.

La figure 6.20 page ci-contre montre un lieu de Nyquist complet typique, correspondant par exemple à un système ayant 3 pôles stables, dont un en $s = 0$

(comportement intégrateur), ce qui explique la présence du quart de cercle de rayon infini.

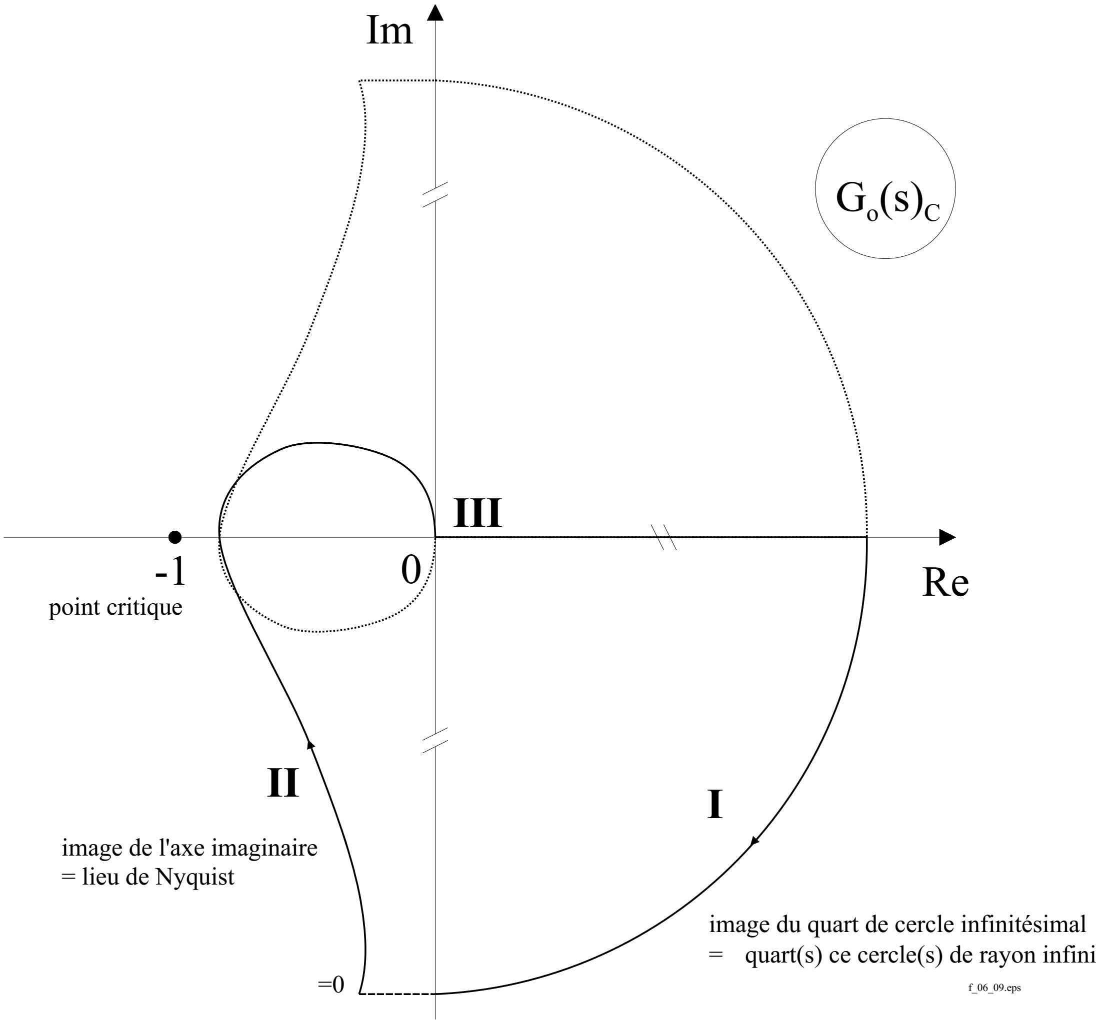


FIG. 6.20 – Exemple de lieu de Nyquist complet : on y observe l'image du quart de cercle infinitésimal (tronçon I), le lieu de Nyquist (tronçon II) et l'image du quart de cercle de rayon ∞ (tronçon III). Le tracé en traitillé est le symétrique du tracé en trait (fichier source).

6.8.2 Critère de Nyquist simplifié (critère du revers)

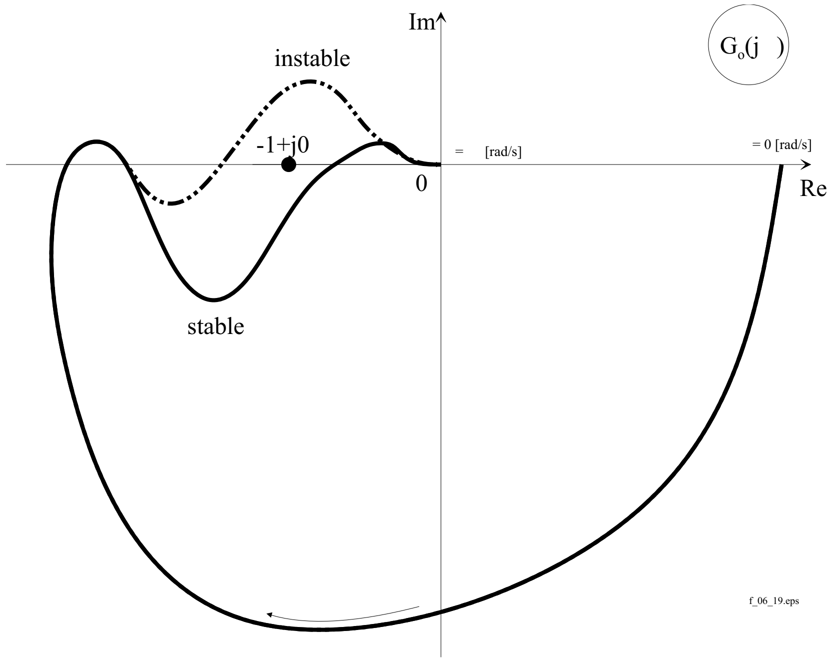


FIG. 6.21 – Application du critère de Nyquist simplifié pour déterminer si un système est stable en boucle fermée ou non (fichier source).

Partant du critère de Nyquist précédemment démontré, on relève que lorsque le système considéré est stable en boucle ouverte, i.e. lorsque $P = 0$, on doit avoir

$$\arg\left\{1 + G_o(s)\right\}_C = 0$$

pour que $G_f(s)$ soit stable. Cela signifie que le lieu de Nyquist complet n'entoure jamais le point critique. Ceci est satisfait si le lieu de Nyquist laisse le point $-1 + j \cdot 0$ à sa gauche lorsqu'on le parcourt dans le sens croissant des ω. Il s'agit du *critère de Nyquist simplifié*, ou *critère du revers* :

Critère de Nyquist simplifié

Un système de régulation automatique linéaire, causal et stationnaire, stable en boucle ouverte, i.e. dont la fonction de transfert en boucle ouverte $G_o(s)$ ne possède aucun pôle instable, est stable en boucle fermée si le lieu de Nyquist de $G_o(j \cdot \omega)$ laisse le point critique

$$-1 + j \cdot 0$$

à sa gauche lorsqu'on le parcourt dans le sens croissant des ω.

Donc, connaissant la réponse harmonique en **boucle ouverte** du système analysé, la stabilité de ce dernier en **boucle fermée** peut être analysée en traçant le lieu de Nyquist de

$$G_o(j \cdot \omega)$$

et en vérifiant que lorsque l'on le parcourt de

$$\omega = 0 \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$

à

$$\omega \longrightarrow \infty \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$

on laisse le point critique

$$-1 + j \cdot 0 = -1$$

à sa gauche (figure 6.21 page précédente).

Remarques

Notons qu'à aucun moment, la fonction de transfert $G_o(s)$ n'a été supposée connue : pour appliquer le critère de Nyquist, la réponse harmonique en boucle ouverte est suffisante ! Cela offre par exemple la possibilité d'analyser la stabilité en boucle fermée sur la base seule d'une réponse harmonique obtenue expérimentalement, sans que la modélisation par fonction de transfert ne soit nécessaire. La linéarité est cependant une condition à satisfaire.

Il vaut également la peine de souligner que c'est la stabilité en **boucle fermée** qui est testée. Le test a cependant pour avantage de ne se baser que sur la fonction de transfert (ou simplement la réponse harmonique) en **boucle ouverte**. Lorsque l'on applique ce critère, on trace donc, dans les diagrammes de Nyquist ou de Bode, la réponse harmonique en **boucle ouverte**.

La validité du critère du revers se limite selon les hypothèses aux systèmes **stables en boucle ouverte**. Certains systèmes vus au laboratoire, tels que la suspension magnétique, de fonction de transfert

$$G_a(s) = \frac{X(s)}{U_a(s)} = \frac{k_o}{\left(s + \frac{1}{T_a}\right) \cdot \left(s^2 + \frac{k_x}{m}\right)}$$

sont instables et nécessiteraient l'emploi du critère de Nyquist complet ou des méthode d'analyse dans le plan complexe afin de tester la stabilité en boucle fermée.

6.8.3 Marge de phase φ_m et marge de gain A_m

Le critère de Nyquist spécifie que le lieu de Nyquist doit laisser le point -1 à sa gauche lorsqu'on le parcourt dans le sens croissant des ω. Le cas où il existerait une pulsation à laquelle le lieu traverserait exactement ce point est un cas limite correspondant à un système en boucle fermée dont la stabilité serait marginale. Un exemple est donné sur la figure 6.22, où le lieu de Nyquist traverse le point critique $-1+j\cdot 0$. La réponse indicielle correspondante confirme le comportement marginalement stable (figure 6.23 page suivante).

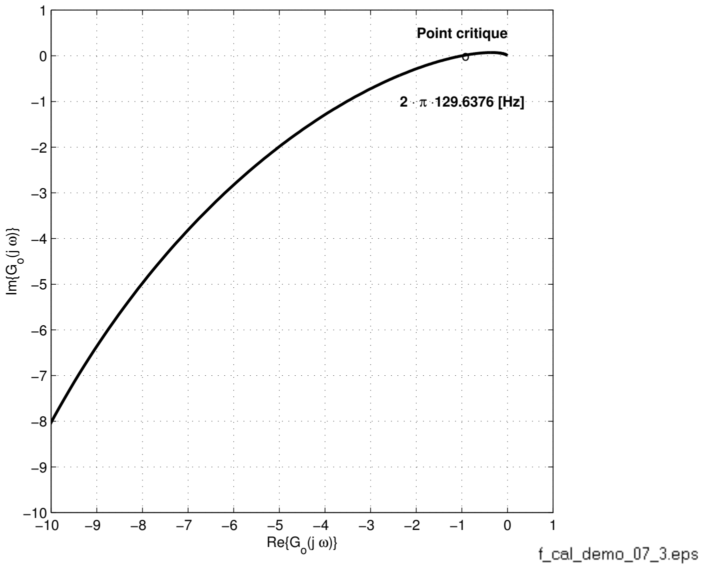


FIG. 6.22 – Exemple de lieu de Nyquist en boucle ouverte d'un système asservi. A la pulsation $\omega \approx 2\cdot\pi\cdot 129.3\,[\mathrm{Hz}]$, le gain de boucle est unitaire et la phase vaut -180 [°] ($G_o(j\cdot 2\cdot\pi\cdot 129.3\,[\mathrm{Hz}]) = -1$). La réponse indicielle en boucle fermée est donnée sur la figure 6.23 page suivante (fichier source).

Mais la tendance vers l'instabilité est graduelle : plus le lieu de Nyquist est proche du point critique, moins le degré de stabilité est bon, i.e. plus on aura par exemple d'oscillations avant stabilisation en boucle fermée.

De façon à quantifier le degré de stabilité d'un système asservi, il est donc utile de chiffrer la distance entre le lieu de Nyquist de $G_o(j\cdot\omega)$ et le point critique $-1+j\cdot 0$. La mesure effective de la distance minimum n'étant pas chose aisée d'un point de vue mathématique, on préfère, de manière traditionnelle, évaluer indirectement cette distance par les mesures des marges de phase φ_m et de gain A_m. Ces grandeurs sont définies ci-dessous.

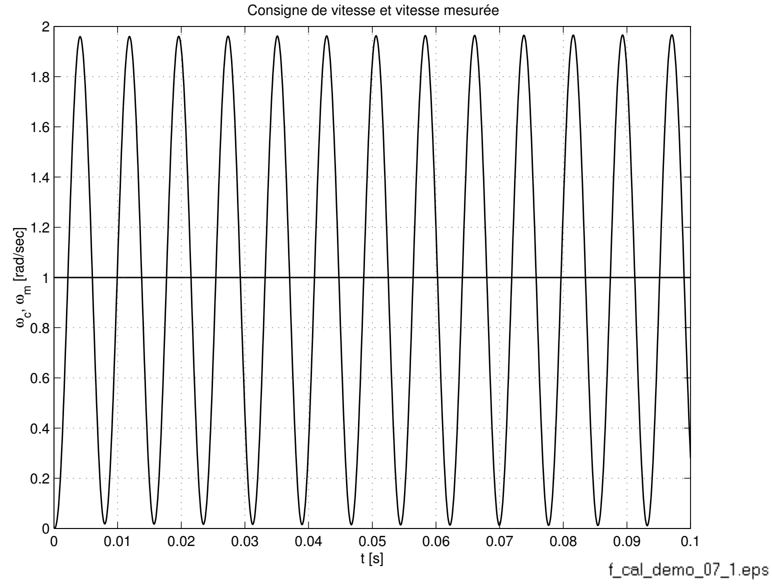


FIG. 6.23 – Réponse indicielle en boucle fermée du système asservi dont le lieu de Nyquist en boucle ouverte est donné sur la figure 6.22 page précédente (fichier source).

Marge de phase φ_m

La marge de phase φ_m d'un système est mathématiquement la différence entre la phase de $G_o(j \cdot \omega)|_{\omega=\omega_{co}}$ et -180 [°] :

$$\boxed{\varphi_m = \arg\left\{G_o(j \cdot \omega)\right\}|_{\omega=\omega_{co}} - (-180\ [^\circ]) = 180 + \arg\left\{G_o(j \cdot \omega)\right\}|_{\omega=\omega_{co}}}$$

Pour la mesurer, on repère donc l'endroit (pulsation ω_{co}) où le gain de boucle $|G_o(j \cdot \omega)|$ est unitaire (figure 6.25 page suivante). L'angle de l'arc liant le point -1 et ce point est φ_m.

On voit donc que si l'on diminue la phase de $G_o(j \cdot \omega)$ de la quantité φ_m, on aura $|G_o(j \cdot \omega)|_{\omega=\omega_{co}} = -1$.

Marge de gain A_m

La marge de gain A_m a pour expression :

$$\boxed{A_m = \frac{1}{|G_o(j \cdot \omega)|_{\omega=\omega_\pi}}}$$

On repère donc le point du lieu de Nyquist (pulsation ω_π) où la phase vaut -180 [°] et l'on calcule le facteur A_m par lequel il faudrait multiplier $G_o(j \cdot \omega)$ pour que $A_m \cdot G_o(j \cdot \omega_\pi)$ vaille -1 (figure 6.25 page suivante).

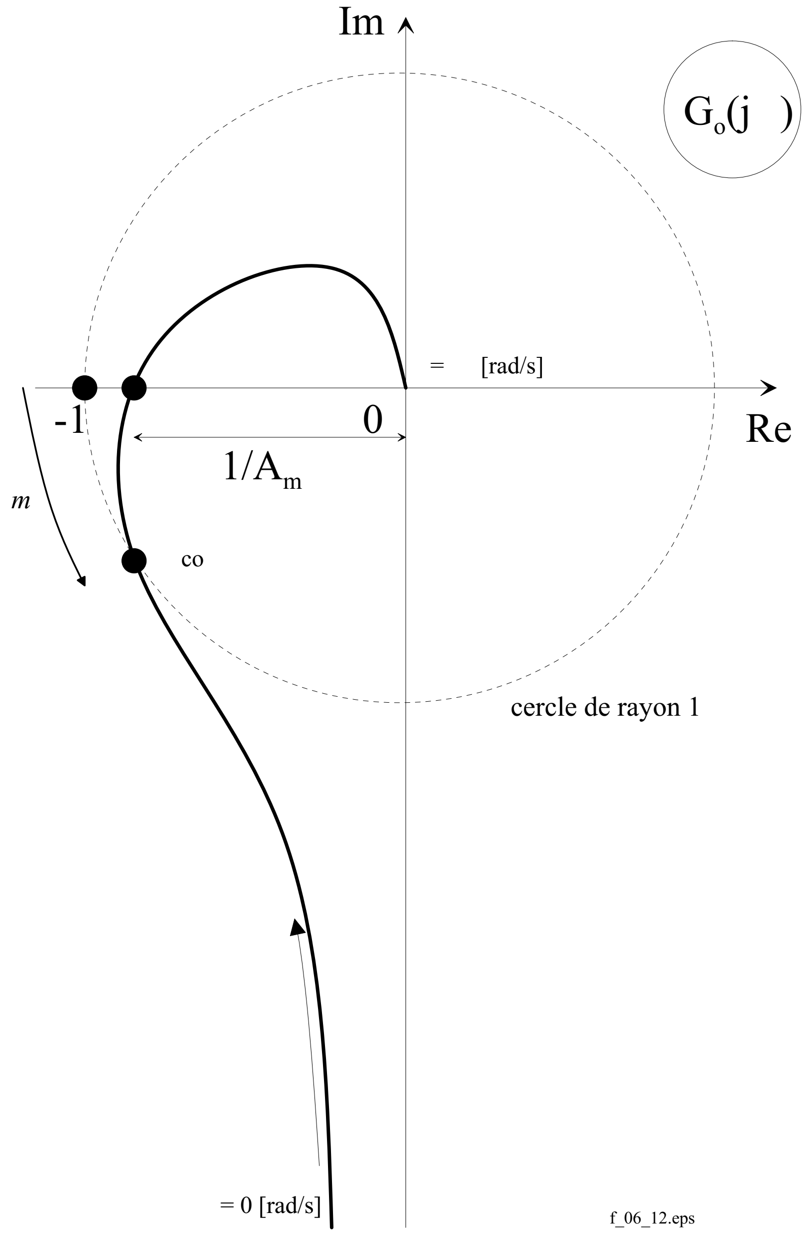


FIG. 6.25 – Définition graphique des marges de phase φ_m et de gain A_m (fichier source).

Interprétation dans le plan de Bode

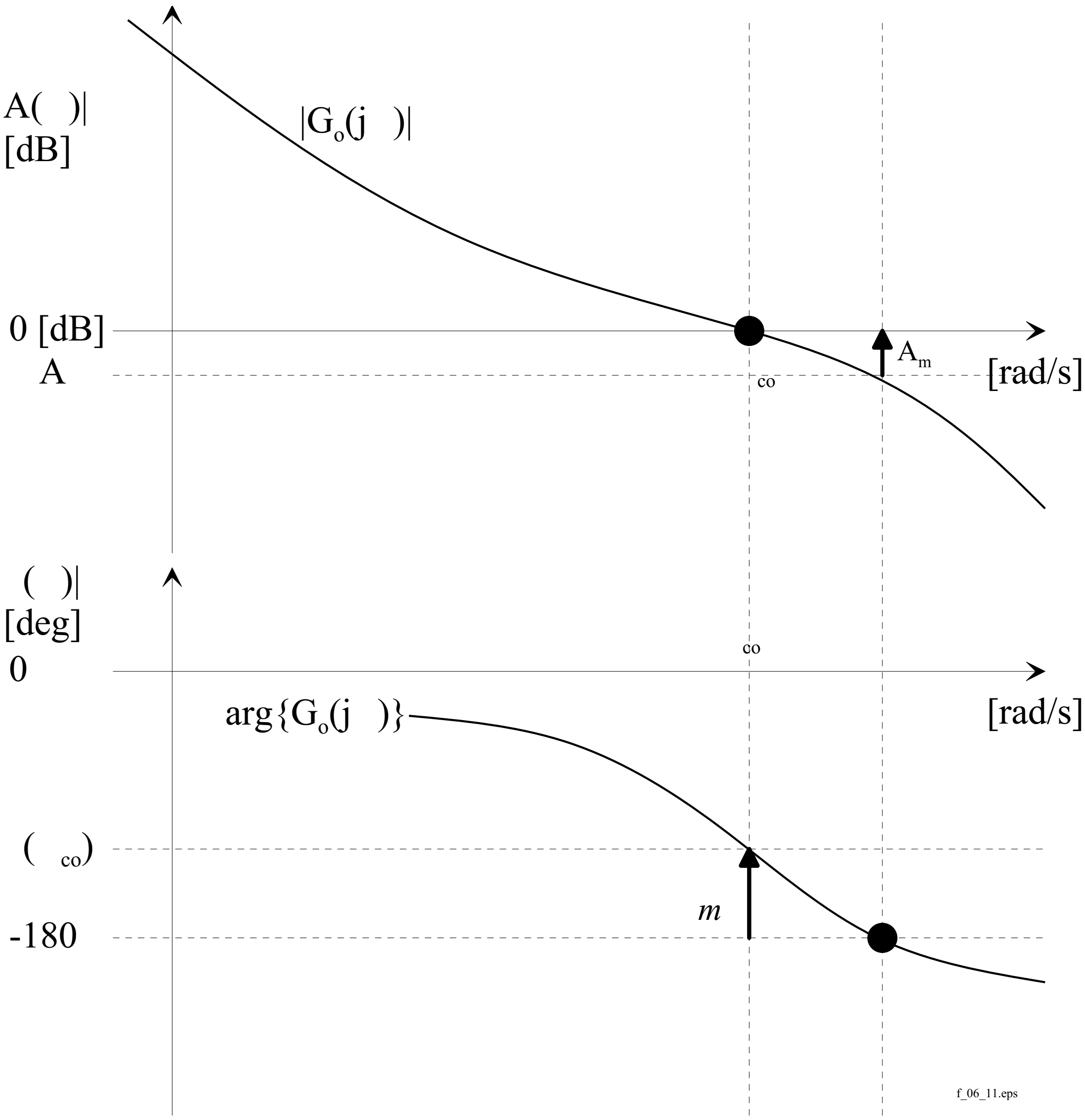


Fig. 6.24 – Définition graphique des marges de phase φ_m et de gain A_m dans le plan de Bode (fichier source).

La traduction des marges de phase et de gain s'effectue en se référant à leurs définition :

– pour la marge de phase φ_m, on repère la pulsation ω_{co} à laquelle le gain est unitaire ($|G_o(j \cdot \omega_{co})| = 1 = 0\,[\text{dB}]$). La différence entre la valeur de la phase en cette pulsation ($\varphi(\omega_{co})$) et -180 [°] donne la marge de phase φ_m cherchée ;

– pour la marge de gain A_m, on repère la pulsation ω_π à laquelle la phase de $G_o(j \cdot \omega)$ est de -180 [°]. La marge de gain est alors la différence entre $0\,[\mathrm{dB}]$ et le gain A_π de $G_o(j \cdot \omega)$ en ω_π.

Valeurs usuelles de φ_m et A_m

Les marges définies ci-dessus permettent d'évaluer la distance entre le point critique et le lieu de Nyquist en boucle ouverte. Imposer leurs valeurs revient à s'assurer que l'on ait jamais $G_o(j \cdot \omega) = -1$, i.e. simultanément (pour la même pulsation ω)

$$|G_o(j \cdot \omega)| = 1$$

et

$$\arg\{G_o(j \cdot \omega)\} = -180\ [°]$$

L'expérience montre que pour des systèmes "classiques" (notamment à phase minimale), un bon degré de stabilité en boucle fermée est obtenu si l'on est capable d'imposer

$$\boxed{\varphi_m \approx 45 \ldots 60\ [°]}$$

et

$$\boxed{A_m > 8 \ldots 15\,[\mathrm{dB}]}$$

Avec ces valeurs, on obtient dans la plupart des cas une paire de pôles dominants en boucle fermée caractérisés par un taux d'amortissement ζ de l'ordre de 0.5 à 0.707.

Il n'est pas inutile d'insister sur le fait que ces marges se mesurent sur la réponse harmonique en boucle ouverte. Les mesurer sur $G_w(j \cdot \omega)$ n'a aucun sens.

6.9 Méthode de Bode

La méthode de Bode permet de choisir le gain permament de boucle K_o et par suite le gain K_p de régulateur P, PI, PD ou PID lorsque tous les pôles et zéros (i.e. toutes les constantes de temps) de $G_o(s)$ sont connues.

$$G_o(s) = \frac{K_o}{s^\alpha} \cdot \frac{(1 + s \cdot T_1^*) \cdot (1 + s \cdot T_2^*) \cdot \ldots}{(1 + s \cdot T_1) \cdot (1 + s \cdot T_2) \cdot \ldots}$$

La stratégie consiste à ajuster K_o de façon à ce que $G_o(j \cdot \omega)$ ait une marge de phase φ_m et une marge de gain A_m conformes aux valeurs recommandées.

6.9.1 Marche à suivre

1. Tracer le diagramme de Bode de $G_o(j \cdot \omega)$ pour $K_o = 1$

2. Repérer la pulsation ω_p à laquelle

$$\arg\{G_o(j \cdot \omega_p)\} = -180\ [^\circ] + \varphi_m$$

   où φ_m est la marge de phase souhaitée, typiquement 45 °C

3. Relever le gain de boucle $|G_o(j \cdot \omega_p)|$ en cette pulsation

4. Calculer le gain K_o à appliquer à $G_o(j \cdot \omega_p)$ pour que $K_o \cdot G_o(j \cdot \omega_p)$ soit unitaire :

$$K_o = \frac{1}{|G_o(j \cdot \omega_p)|}$$

5. En déduire la valeur de K_p

6. Vérifier que $A_m > 8 \ldots 15\,[\mathrm{dB}]$

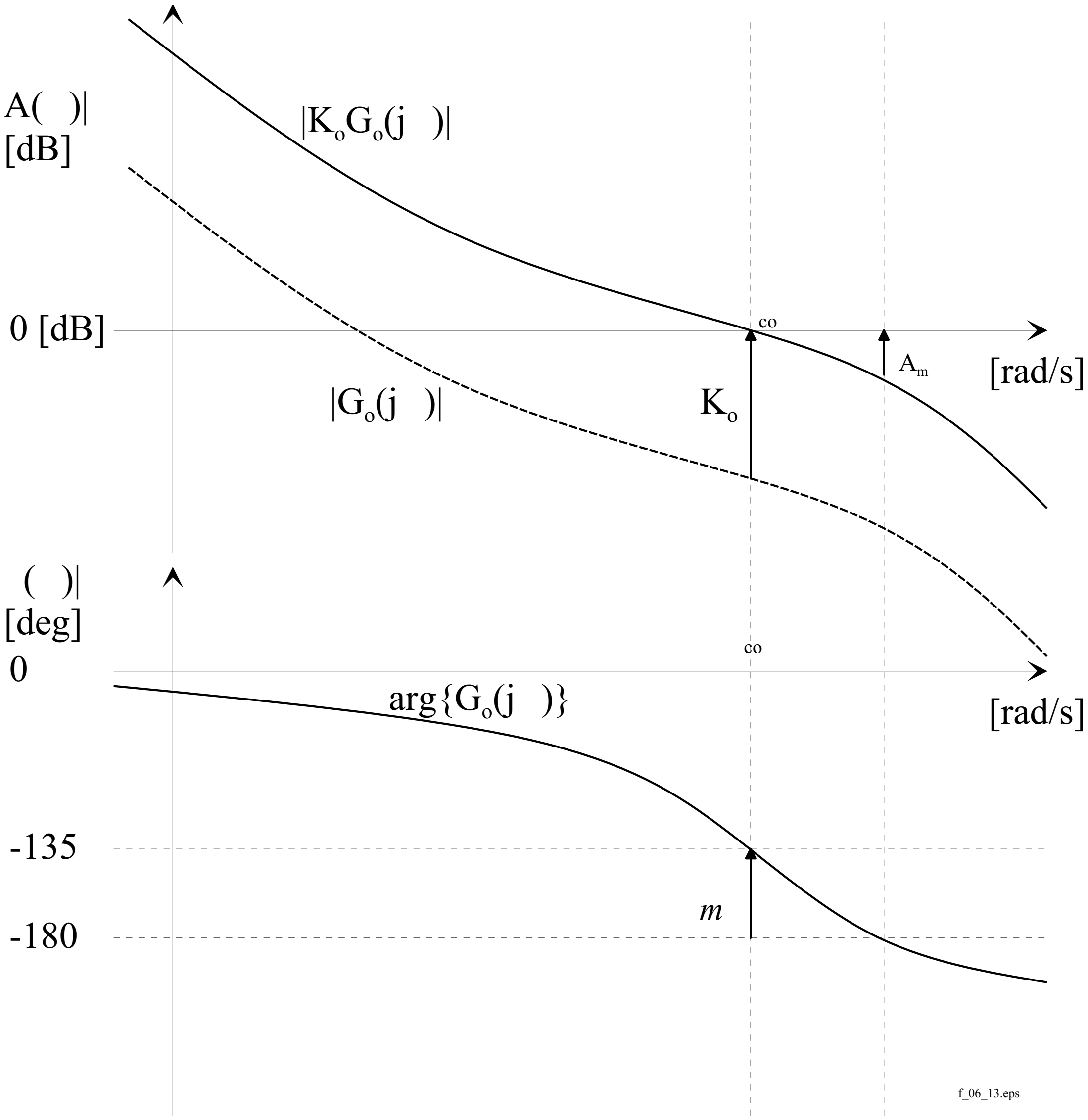


FIG. 6.26 – Illustration de la méthode de Bode. Ici, on ajuste K_o (par le biais du gain K_p du régulateur P) pour que la marge de phase φ_m soit égale à 45 [°] (fichier source).

6.10 Stabilité robuste [7]

Le critère de stabilité de Nyquist se base sur la connaissance de la réponse harmonique en boucle ouverte. Avec l'étude de la stabilité robuste, on tente de répondre à la question "qu'en est-il de la stabilité en boucle fermée lorsque la réponse harmonique en boucle ouverte n'est connue qu'avec une certaine précision ?"

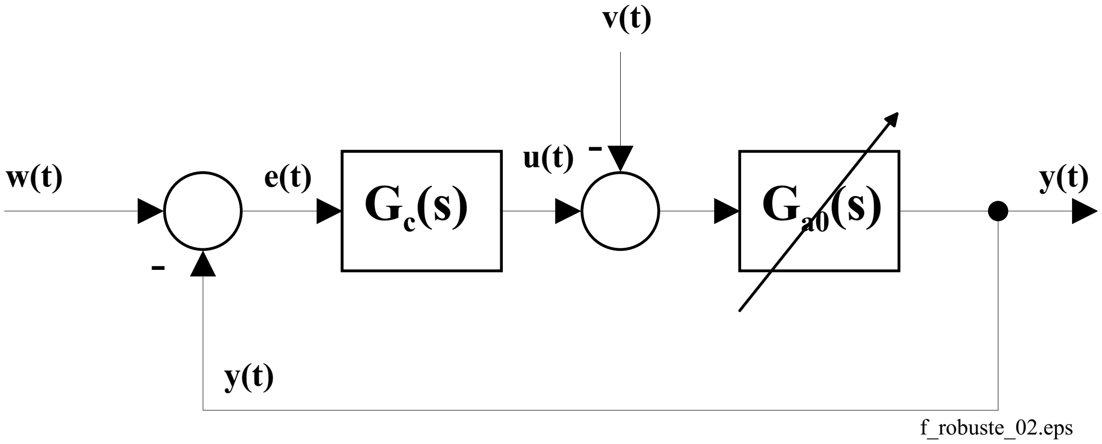


Fig. 6.27 – Système asservi dont les paramètres du système à régler $G_a(s)$ sont susceptibles de varier (fichier source)

On considère un système de régulation automatique mono-variable (figure 6.27), dont la fonction de transfert du système à régler $G_a(s)$ n'est connue qu'avec une précision donnée, i.e. dont les paramètres subissent des fluctuations. La valeur nominale de $G_a(s)$ est $G_{a0}(s)$. La fonction de transfert en boucle ouverte nominale est ainsi

$$G_{o0}(s) = G_c(s) \cdot G_{a0}(s)$$

alors que la fonction de transfert nominale en boucle fermée, régulation de correspondance, est

$$G_{w0}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_{o0}(s)}{1 + G_{o0}(s)} = \frac{G_c(s) \cdot G_{a0}(s)}{1 + G_c(s) \cdot G_{a0}(s)}$$

L'imprécision dont on parle est l'incertitude liée à la modélisation et à l'identification de la réponse harmonique en boucle ouverte. Celle-ci étant formée de la mise en cascade du régulateur $G_c(s)$ et du système à régler $G_a(s)$, c'est normalement à cette dernière fonction de transfert que sont dues des variations.

6.10.1 Incertitude sur la fonction de transfert du système à régler [[7], p.46-47]

Profil d'incertitude $|W_2(j \cdot \omega)|$

Pour représenter l'incertitude liée à la fonction de transfert du système à régler, on se place ici dans le domaine fréquentiel et l'on construit la fonction

$$|W_2(j \cdot \omega)| \geq \left| \frac{G_a(j \cdot \omega) - G_{a0}(j \cdot \omega)}{G_{a0}(j \cdot \omega)} \right|$$

que l'on appelle **profil d'incertitude**. On voit que $|W_2(j \cdot \omega)|$ représente l'incertitude relative affectant le modèle nominal $G_{a0}(s)$.

Le modèle d'incertitude utilisé ici est *non-structuré*, ce qui signifie grosso modo que l'on ne prend pas en compte les variations individuelles des paramètres (par exemple, pour l'asservissement de vitesse d'un moteur DC, on aurait $J = J_0 \pm \Delta J$ et/ou $R_{amin} \leq R_{a0} \leq R_{amax}$) du modèle nominal $G_{a0}(s)$, mais que $|W_2(j \cdot \omega)|$ traduit plutôt leur effet global en fonction de la fréquence.

Notons qu'aucune hypothèse n'a été posée sur $|W_2(j \cdot \omega)|$, qui peut être une fonction quelconque, notamment une fonction non-linéaire avec la fréquence.

Disque d'incertitude

L'inégalité de la définition de $|W_2(j \cdot \omega)|$ indique que $|W_2(j \cdot \omega)|$ est la borne supérieure de la variation relative du modèle. A une pulsation ω_p donnée, le module de la variation relative maximale de $G_a(j \cdot \omega_p)$ par rapport à $G_{a0}(j \cdot \omega_p)$ n'est autre que $|W_2(j \cdot \omega)|$ et peut être

- d'amplitude comprise comprise entre 0 et $|W_2(j \cdot \omega_p)|$
- d'une phase aléatoire, comprise entre 0 et 360 [°]

Ce que l'on décrit ici n'est autre qu'un disque, appelé *disque d'incertitude*, centré en $G_{a0}(j \cdot \omega_p)$ et de rayon $|W_2(j \cdot \omega_p) \cdot G_{a0}(j \cdot \omega_p)|$ (figure 6.28 page suivante). Pour une fréquence donnée ω_p, l'évolution de l'amplitude dans tout le disque ainsi que la variation de phase (figure 6.29 page 242) est intégrée au profil d'incertitude $|W_2(j \cdot \omega)|$ en écrivant que

$$\frac{G_a(s) - G_{a0}(s)}{G_{a0}(s)} = \Delta(s) \cdot W_2(s)$$

où $\Delta(s)$ est une fonction de transfert stable telle que

$$\mathrm{Sup}_\omega |\Delta(j \cdot \omega)| = \|\Delta\|_\infty \leq 1$$

Il est clair que le modèle d'incertitude non-structuré choisi ici est *conservateur*, puisqu'il constitue une sorte de cas le plus défavorable : il est en effet peu probable qu'en prenant vraiment en compte les variations cumulées de ses paramètres

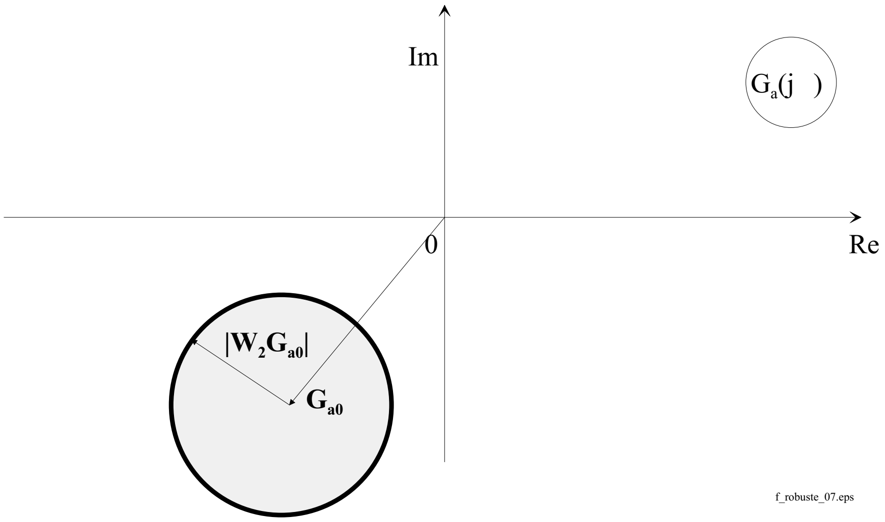


FIG. 6.28 – Le disque d'incertitude définit, pour une pulsation ω_p donnée, la zone dans laquelle la fonction de transfert $G_a(j \cdot \omega)$ peut se trouver. $|W_2(j \cdot \omega_p)|$ correspond à la limite du disque, soit à la variation maximale par rapport à la fonction de transfert nominale $G_{a0}(j \cdot \omega)$ (fichier source).

individuels, le système à régler $G_a(s)$ se différencie autant de sa valeur nominale $G_{a0}(s)$ que ne le prévoit le profil d'incertitude $|W_2(j \cdot \omega)|$.

En se limitant ainsi au modèle d'incertitude non-structuré, on simplifie grandement l'analyse mathématique du problème, ce qui aura l'avantage de fournir des résultats applicables pratiquement. De surcroît, on couvre également la situation où une partie de la dynamique du système à régler n'a pas pu être modélisée.

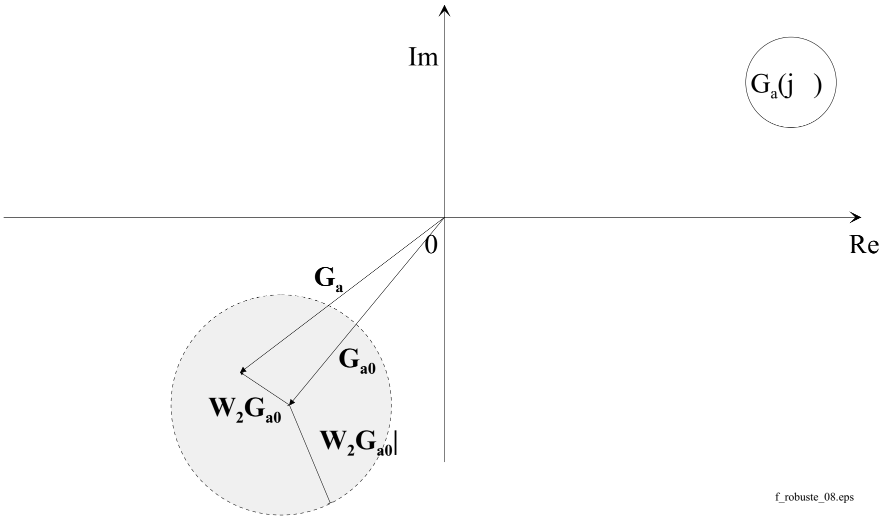


FIG. 6.29 – C'est $\Delta(s)$ qui fait évoluer la fonction de transfert $G_a(s)$ dans tout le disque d'incertitude (fichier source).

Allure typique du profil d'incertitude $|W_2(j \cdot \omega)|$

L'allure typique de $|W_2(j \cdot \omega)|$ est une fonction croissant avec la fréquence (figure 6.30), puisqu'il est d'autant plus difficile de modéliser et identifier les modes rapides, i.e. la dynamique à fréquence élevées.

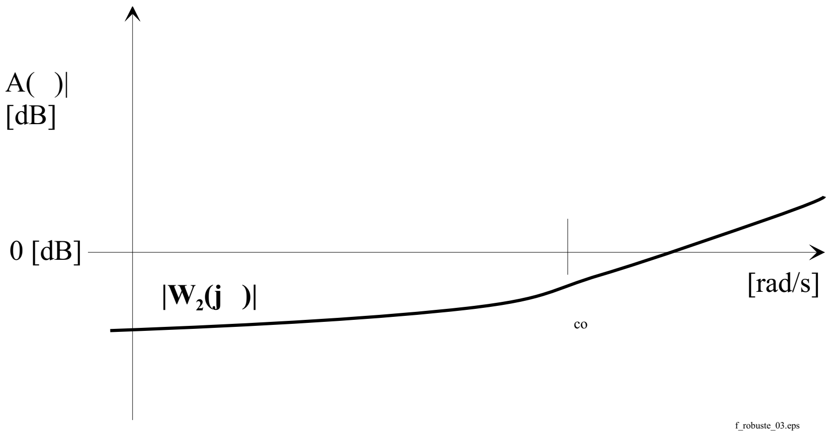


FIG. 6.30 – Allure typique du profil d'incertitude $|W_2(j \cdot \omega)|$ (fichier source).

6.10.2 Théorème de la stabilité robuste [[7], p.53]

On énonce ci-dessous le théorème de la stabilité robuste :

> Un système de régulation automatique linéaire est à stabilité robuste si
>
> $$\|W_2(j\cdot\omega)\cdot G_{w0}(j\cdot\omega)\|_\infty < 1$$

avec $\|W_2(j\cdot\omega)\cdot G_{w0}(j\cdot\omega)\|_\infty = \mathrm{Sup}_\omega\,|W_2(j\cdot\omega)\cdot G_{w0}(j\cdot\omega)|$.

Partant du profil d'incertitude $|W_2(j\cdot\omega)|$ et de la fonction de transfert nominale en boucle fermée, régulation de correspondance $G_{w0}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_c(s)\cdot G_{a0}(s)}{1+G_c(s)\cdot G_{a0}(s)}$, il suffit donc de tracer le diagramme de Bode du module de $W_2(j\cdot\omega)\cdot G_{w0}(j\cdot\omega)$ et de vérifier qu'il est toujours inférieur à 0 [dB] (figure 6.31).

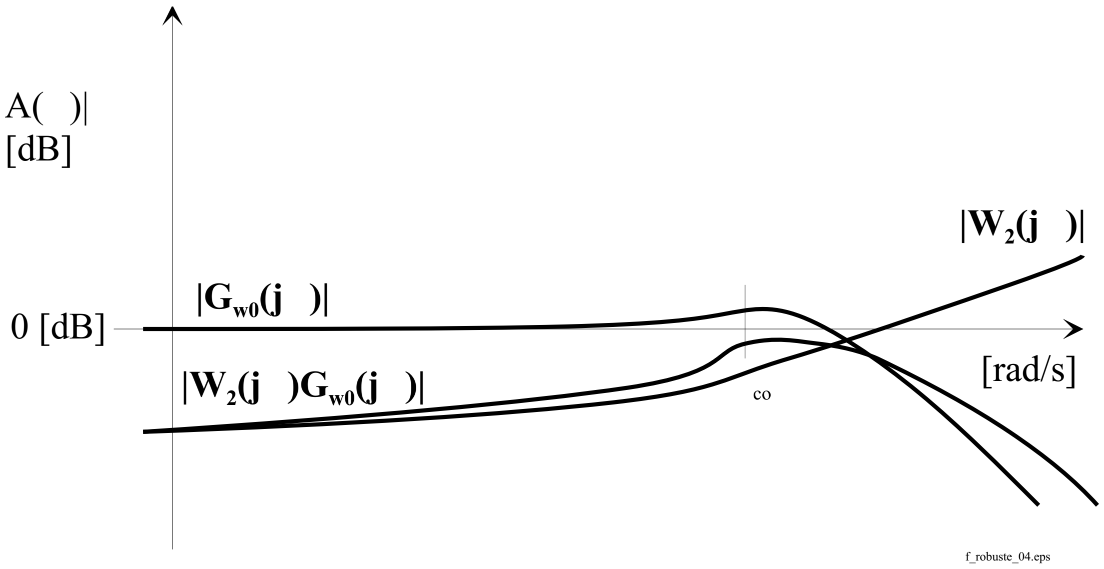


FIG. 6.31 – Test de la stabilité robuste (fichier source).

Sur la base de la figure 6.31, on peut qualitativement estimer la précision requise sur le modèle : l'atténuation du gain en boucle fermée doit au moins compenser la croissance du profil d'incertitude. On voit que probablement, $\|W_2\cdot G_{w0}\|_\infty$ intervient non loin de la bande passante en boucle fermée, et donc approximativement de la pulsation de coupure à 0 [dB] en boucle ouverte ω_{co}.

Démonstration Partant du lieu de Nyquist de $G_o(j\cdot\omega)$ (figure 6.32 page suivante) on a successivement :

– $G_o(j\cdot\omega)$ correspond au design nominal, lequel satisfait le critère de Nyquist

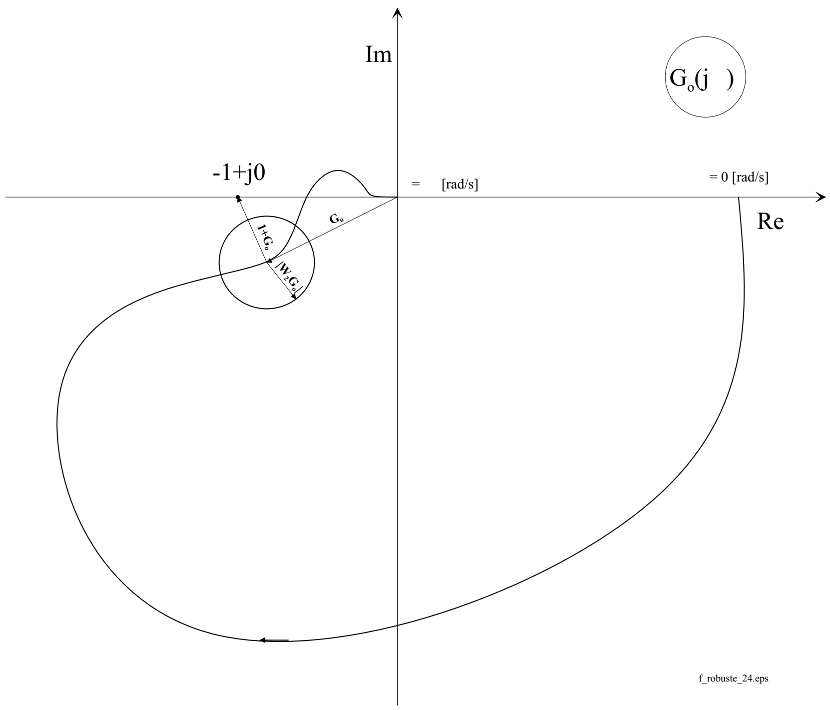


FIG. 6.32 – Lieu de Nyquist de $G_o(j \cdot \omega)$ nominal, disque d'incertitude, mise en évidence des distances (fichier source).

- La distance entre le point critique $-1 + j \cdot 0$ et $G_o(j \cdot \omega)$

$$|-1 - G_o(j \cdot \omega)| = |1 + G_o(j \cdot \omega)|$$

  est telle que le point critique est laissé sur la gauche du lieu de Nyquist (figure 6.32). Cette distance peut être considérée comme un sorte de "réserve". La perte intégrale de cette distance amènerait le lieu de Nyquist sur le point critique, ce qui est à éviter absolument !
- La variation de distance potentielle $|W_2(j \cdot \omega) \cdot G_o(j \cdot \omega)|$ doit donc être inférieure à la distance nominale $|1 + G_o(j \cdot \omega)|$:

$$\underbrace{|W_2(j \cdot \omega) \cdot G_o(j \cdot \omega)|}_{\text{variation de distance potentielle}} < \underbrace{|1 + G_o(j \cdot \omega)|}_{\text{distance nominale selon design}}$$

- D'où, par division des 2 membres de l'égalité par $|1 + G_o(j \cdot \omega)|$:

$$\frac{|W_2(j \cdot \omega) \cdot G_o(j \cdot \omega)|}{|1 + G_o(j \cdot \omega)|} < 1$$

- Donc

$$|W_2(j \cdot \omega) \cdot G_w(j \cdot \omega)| < 1$$

Interprétation graphique

La condition de stabilité robuste peut être interprétée graphiquement comme suit : le système de régulation automatique est stable si le point critique $-1+j\cdot 0$ demeure à l'extérieur du disque

- de centre $G_{o0}(j\cdot\omega)$
- de rayon $|W_2(j\cdot\omega)\cdot G_{o0}(j\cdot\omega)|$

comme le montre la figure 6.33.

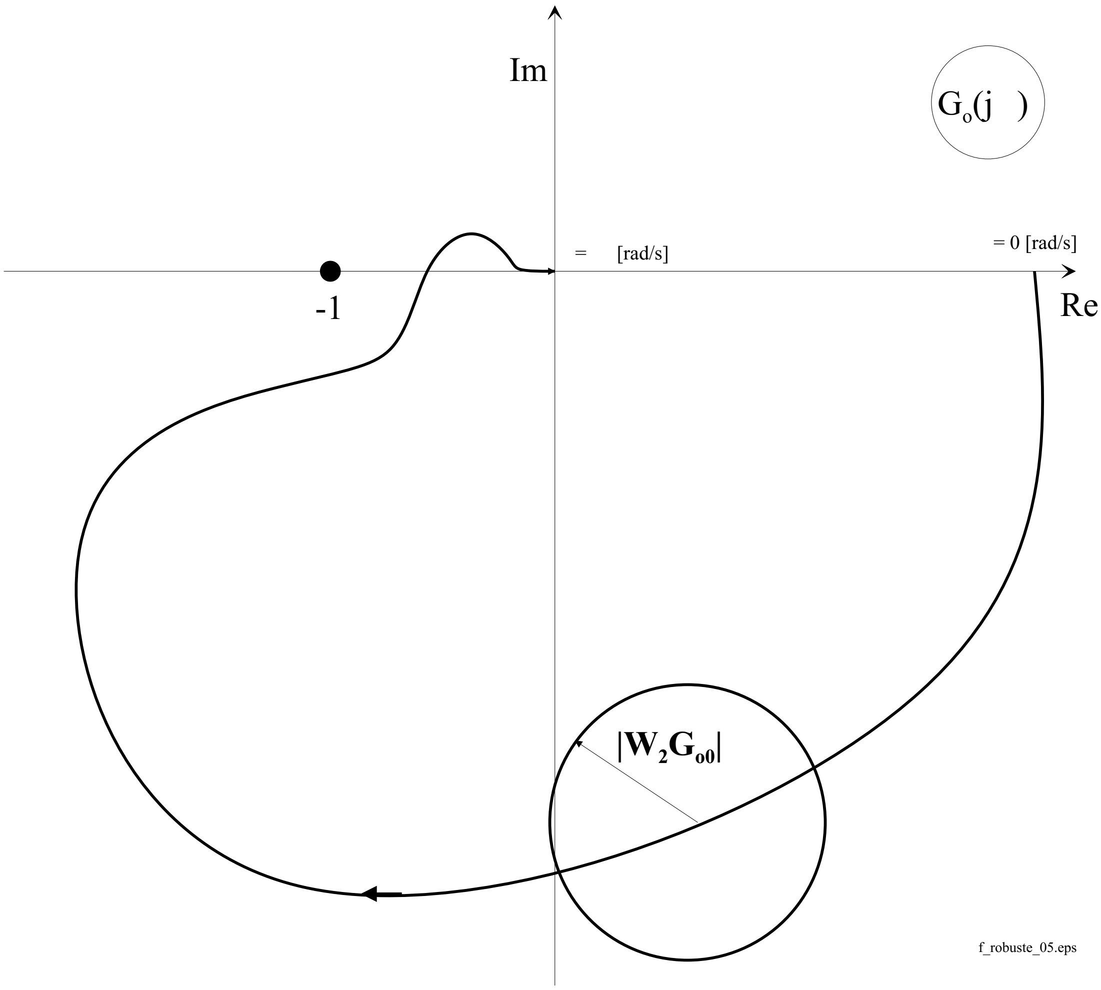


Fig. 6.33 – Interprétation graphique du théorème de la stabilité robuste : le point critique doit rester à l'extérieur du disque (fichier source).

6.10.3 Exemple

On considère un système à régler de fonction de transfert nominale

$$G_{a0}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K_a \cdot \frac{1}{(1 + s \cdot 11124) \cdot (1 + s \cdot 2) \cdot (1 + s \cdot 2)}$$

asservi par le régulateur PID

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{\frac{K_p}{T_i}}{s} \cdot (1 + s \cdot T_i + s^2 \cdot T_i \cdot T_d)$$

avec $K_p = 349.7$, $T_d = 38\,[\mathrm{s}]$ et $T_i = 380\,[\mathrm{s}]$. Il s'agit d'un système de régulation automatique de la température d'un élément d'une machine de production industrielle (observer la valeur de la constante de temps dominante !). Avec les

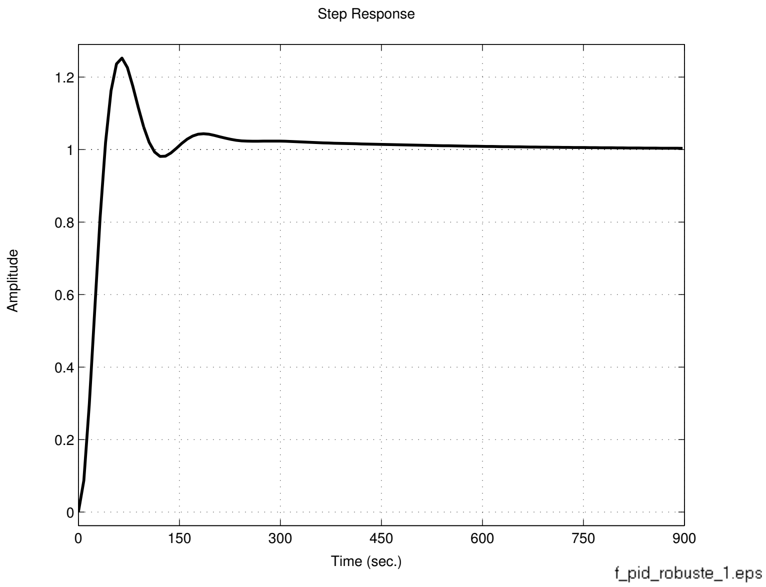


FIG. 6.34 – Réponse indicielle en boucle fermée, cas nominal (fichier source).

paramètres du régulateur PID donnés, la réponse indicielle en boucle fermée est satisfaisante (figure 6.34), et la question se pose de savoir quelle est la robustesse de la stabilité offerte dans le cas nominal. Dans ce but, on définit un profil d'incertitude (figure 6.35 page ci-contre), sur la base des informations que l'on a quant à la qualité de $G_{a0}(s)$. Dans le cas particulier, des variations observées du gain à basse fréquence amènent à prendre en compte une incertitude relative de quelque $-6\,[\mathrm{dB}]$, soit 50%. Cette imprécision s'améliore aux fréquences moyennes ($-10\,[\mathrm{dB}] = 33\%$) et finit bien sûr par augmenter considérablement aux hautes fréquences.

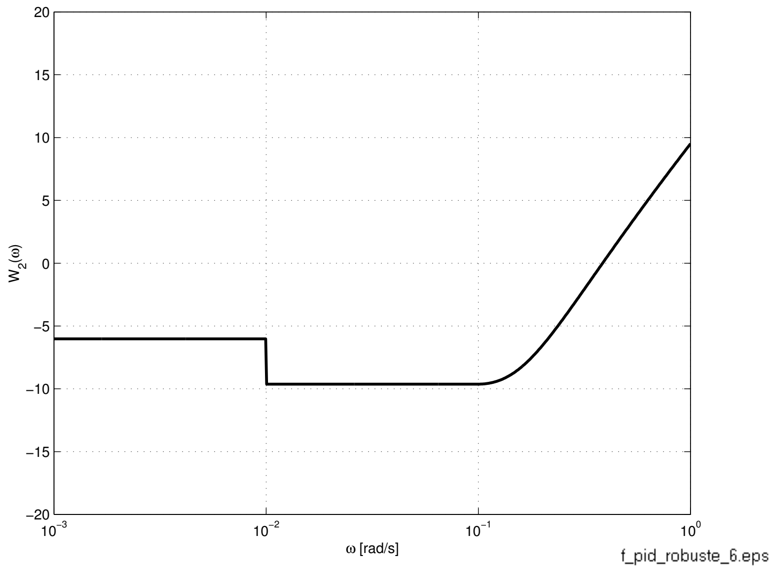


FIG. 6.35 – Profil d'incertitude : $-6\,[\mathrm{dB}] = 50\%$ à basse fréquence, $-10\,[\mathrm{dB}] = 33\%$ aux fréquences intermédiaires et augmentation aux hautes fréquences. On remarque que la fonction $W_2(j \cdot \omega)$ peut être quelconque (mais doit être stable), en particulier discontinue. Ce n'est donc pas forcément une fonction de transfert (fichier source).

Notons qu'en principe, c'est plutôt la démarche inverse qui est suivie : ayant défini le profil d'incertitude $|W_2(j \cdot \omega)|$, on en déduit les performances possibles de $G_{w0}(s)$ et par suite le régulateur $G_c(s)$: c'est l'objet de la synthèse robuste.

On peut alors faire le test de la stabilité robuste, en traçant ici le diagramme de Bode du gain $\|W_2(j \cdot \omega) \cdot G_{w0}(j \cdot \omega)\|_\infty < 1$ (figure 6.36 page suivante). On observe que la condition de stabilité robuste est satisfaite.

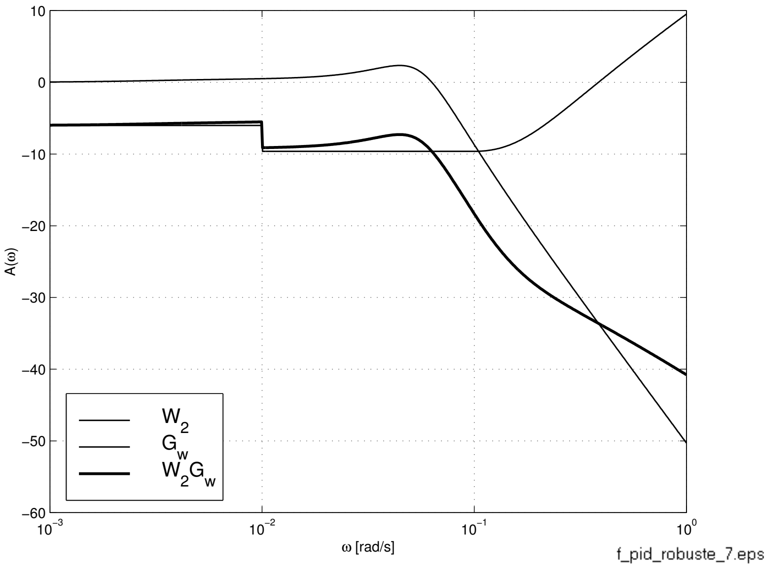


FIG. 6.36 – Test de la condition de stabilité robuste : on voit que ce test est satisfait puisque la courbe $\|W_2(j \cdot \omega) \cdot G_{w0}(j \cdot \omega)\|_\infty$ est inférieure à $1 = 0$ [dB] (fichier source).

Chapitre 7

Analyse dans le plan complexe

7.1 Introduction

Contrairement aux méthodes d'analyse et de synthèse fréquentielles, basées sur la réponse harmonique de la fonction de transfert $G_o(s)$ en boucle ouverte, on étudie ici les performances (stabilité et rapidité) d'un système de régulation automatique en analysant directement ses pôles en boucle fermée. Précisément, c'est l'influence du gain permanent de boucle K_o sur la position de ceux-ci dans le plan complexe qui est examinée.

Détail à relever, les méthodes présentées ici s'appliquent aussi bien aux systèmes stables qu'instables en boucle ouverte, contrairement aux méthodes fréquentielles basées sur le critère de Nyquist simplifié (i.e. critère du revers).

7.2 Fonctions de transfert

Il est recommandé de présenter toutes le fonctions de transfert sous forme d'Evans, i.e. de Laplace, i.e sous une forme telle que les coefficients des plus hautes puissances de s soient unitaires :

$$
\begin{aligned}
G_o(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \overbrace{\frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0}}^{\text{forme quelconque}} \\
&= \overbrace{\underbrace{\frac{b_m}{a_n}}_{k_o} \cdot \frac{s^m + \frac{b_{m-1}}{b_m} \cdot s^{m-1} + \ldots + \frac{b_0}{b_m}}{s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot s^{n-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}}}^{\text{forme de Laplace}} \\
&= k_o \cdot \overbrace{\frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \ldots \cdot (s - z_m)}{(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot \ldots \cdot (s - s_n)}}^{\text{forme de Laplace factorisée}} \\
&= k_o \cdot \frac{n_o(s)}{d_o(s)}
\end{aligned}
$$

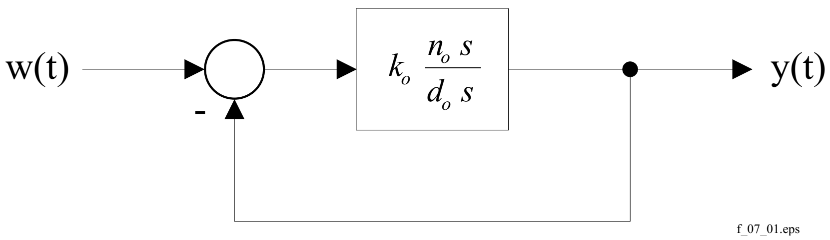


Fig. 7.1 – Les fonctions de transfert doivent être mises sous forme d'Evans (Laplace).

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit, dans le cas de la régulation de correspondance et lorsque le retour est unitaire (figure 7.1)

$$
\begin{aligned}
G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} &= \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} \\
&= \frac{k_o \cdot \frac{n_o(s)}{d_o(s)}}{1 + k_o \cdot \frac{n_o(s)}{d_o(s)}} \\
&= \frac{k_o \cdot n_o(s)}{d_o(s) + k_o \cdot n_o(s)} \\
&= \frac{k_o \cdot (s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \ldots \cdot (s - z_m)}{(s - s_{f1}) \cdot (s - s_{f2}) \cdot \ldots \cdot (s - s_{fn})}
\end{aligned}
$$

On note au passage que toutes les fonctions de transfert en boucle fermée que l'on peut calculer ont le même dénominateur

$$d_o(s) + k_o \cdot n_o(s)$$

puisque l'on a toujours

$$G_{\text{boucle fermee}}(s) = \frac{\text{fonction de transfert de la chaîne d'action}}{1 + \text{fonction de transfert de la boucle}}$$

On voit également que les ordres de $G_o(s)$ et de $G_w(s)$ coïncident. L'exception à ces 2 observations est celui de la synthèse par compensation pôle-zéro (voir cours de régulation numérique, [10], chap.7).

Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont les valeurs de s annulant le dénominateur de $G_w(s)$. Ils sont donc solutions de l'équation caractéristique

$$d_c(s) = d_o(s) + k_o \cdot n_o(s) = 0$$

On note que seuls les pôles sont modifiés par la contre-réaction, les zéros en boucle fermée coïncidant avce ceux en boucle ouverte.

k_o est le facteur d'Evans. Il est proportionnel au gain permanent :

$$K_o = k_o \cdot \left| \frac{(-z_1) \cdot (-z_2) \cdot \ldots \cdot (-z_m)}{(-s_1) \cdot (-s_2) \cdot \ldots \cdot (-s_n)} \right|_{s_i \neq 0} = k_o \cdot \left. \frac{\prod |z_j|}{\prod |s_i|} \right|_{z_i \neq 0 \quad s_i \neq 0}$$

7.3 Définition du lieu d'Evans

> Le lieu d'Evans, ou lieu des pôles, est le lieu décrit dans le plan complexe par les n pôles de la fonction de transfert en boucle fermée, i.e par les n racines de l'équation caractéristique $d_c(s) = d_o(s) + k_o \cdot n_o(s) = 0$ lorsque que le facteur d'Evans k_o varie de 0 à l'infini.

Avec le lieu d'Evans, on représente donc graphiquement dans le plan de s l'évolution des pôles de la fonction de transfert en boucle **fermée** lorsque que le gain de boucle k_o varie de 0 à l'infini.

Les pôles en boucle fermée déterminent complètement la stabilité, et en affinant l'analyse par le calcul des marges de stabilité absolue et relative (§ 7.8 page 262), l'examen de la position des pôles permet également de déterminer le degré de stabilité. De plus, pour autant que les zéros soient "normaux" (systèmes à déphasage minimal), les pôles imposent largement la forme et la durée du régime libre (apériodique ou oscillatoire), observable en régime transitoire, par exemple aux premiers instants de la réponse indicielle.

Il y a donc un intérêt certain à connaître l'emplacement dans le plan complexe des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée d'un système de régulation numérique. Le plan complexe est bien sûr ici le plan de s. Il est encore plus intéressant de pouvoir examiner la manière dont ces mêmes pôles évoluent dans le plan de s lorsque le gain en boucle ouverte est modifié.

7.4 Exemple

Soit à tracer le lieu d'Evans du système asservi ayant pour fonction de transfert en boucle ouverte

$$G_o(s) = \frac{K_o}{s} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot T}$$

Sous forme d'Evans (Laplace), $G_o(s)$ devient :

$$G_o(s) = \frac{K_o}{s} \cdot \frac{1}{T \cdot (s - (-\frac{1}{T}))} = \frac{\frac{K_o}{T}}{s} \cdot \frac{1}{s - s_1} = \frac{k_o}{s} \cdot \frac{1}{s - s_1} = k_o \cdot \frac{n_o(s)}{d_o(s)}$$

L'équation caractéristique est donc

$$d_c(s) = d_o(s) + k_o \cdot n_o(s) = s \cdot (s - s_1) + k_o = s^2 - s_1 \cdot s + k_o$$

et les pôles en boucle fermée sont donnés par

$$s_{f1,2} = \frac{s_1 \pm \sqrt{s_1^2 - 4 \cdot k_o}}{2}$$

On peut déterminer quelques valeurs particulières de k_o :

$$k_o = 0 \qquad s_{f1,2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{s_1 + s_1}{2} = s_1 \\ \frac{s_1 - s_1}{2} = 0 \end{array} \right\} \text{ pôles en boucle ouverte}$$

$$k_o < \frac{s_1^2}{4} \qquad s_{f1,2} \text{ sont réels et distincts}$$

$$k_o = \frac{s_1^2}{4} \qquad s_{f1,2} = \frac{s_1}{2} \text{ sont réels confondus}$$

$$k_o > \frac{s_1^2}{4} \qquad s_{f1,2} = \frac{s_1}{2} \pm j \frac{\cdot\sqrt{4 \cdot k_o - s_1^2}}{2} \text{ sont complexes conjugués}$$

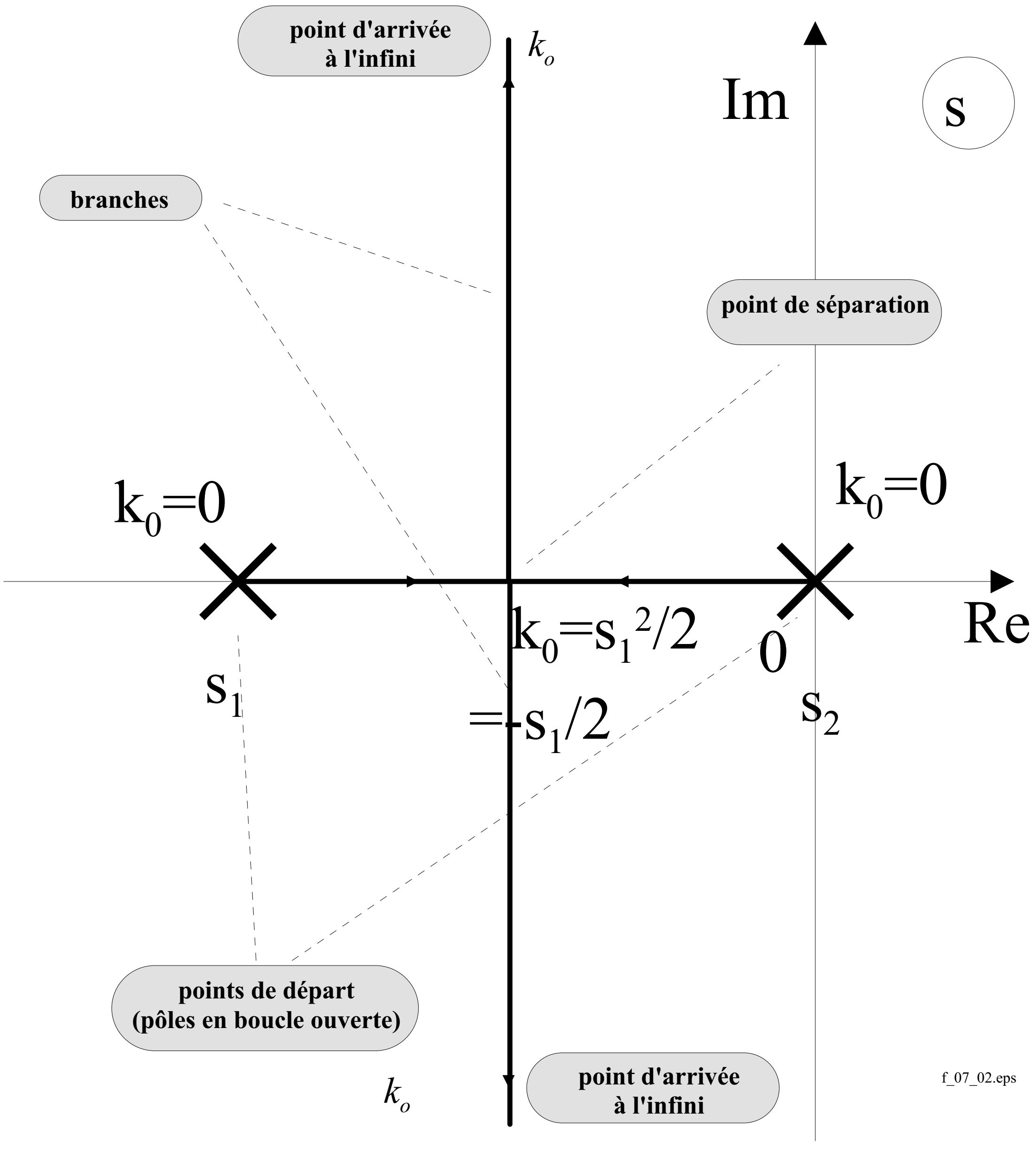


Fig. 7.2 – Lieu d'Evans de $G_o(s) = \frac{k_o}{s} \cdot \frac{1}{s-s_1}$ (f_07.dsf).

7.5 Condition des angles et condition des modules

On démontre ci-dessous

- la condition des angles, qui permet de savoir si un point S quelconque du plan de s appartient ou non au lieu d'Evans ;
- la condition des modules, qui permet de calculer le gain k_o à appliquer pour que l'un des pôles en boucle fermée soit situé en un point choisi du lieu d'Evans.

Dans les deux cas, si un point $s_p = \sigma + j \cdot \omega$ appartient au lieu, alors

$$d_c(s_p) = 0 = d_o(s_p) + k_o \cdot n_o(s_p) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{n_o(s_p)}{d_o(s_p)} = -\frac{1}{k_o}$$

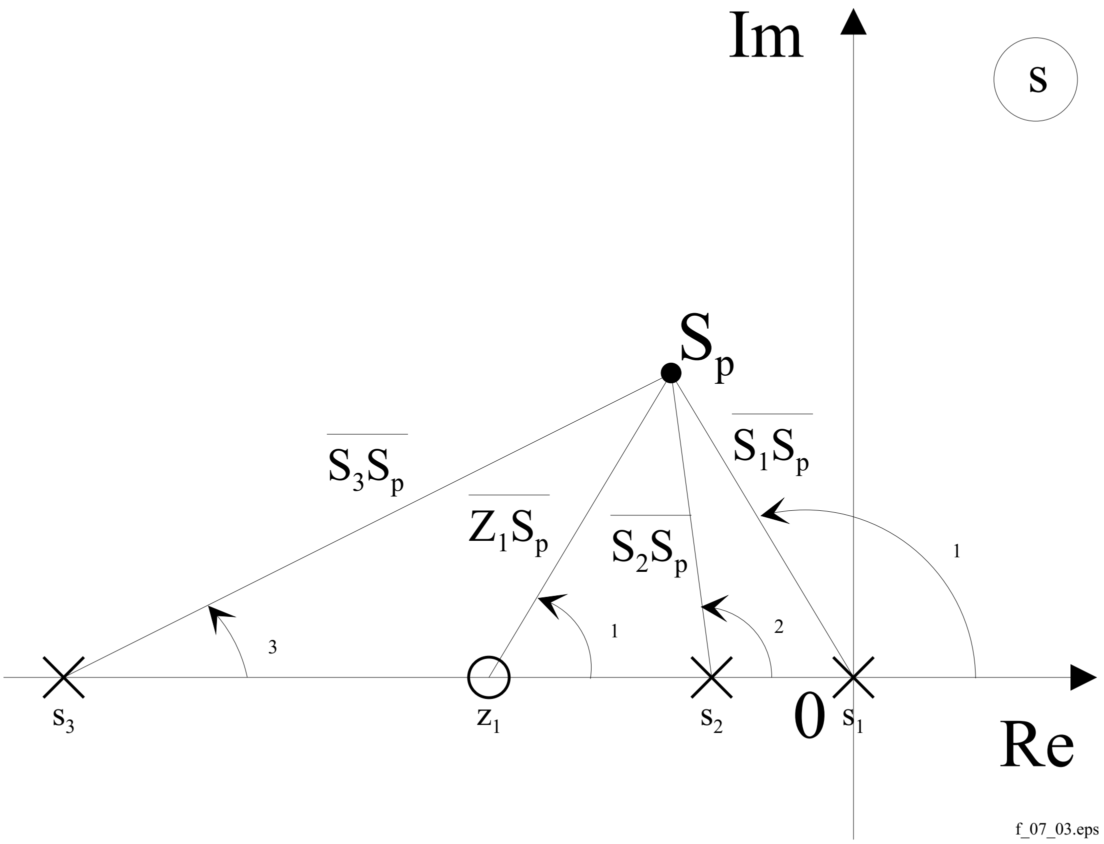


Fig. 7.3 – Définition des angles α_j et β_i ainsi que des segments $\overline{Z_jS_p}$ et $\overline{S_iS_p}$ (f_07.dsf).

7.5.1 Condition des angles

Partant de la dernière expression ci-dessus, on a :

$$\arg\left\{\frac{n_o(s_p)}{d_o(s_p)}\right\} = \arg\left\{-\frac{1}{k_o}\right\}(1+2\cdot\lambda)\cdot\pi \qquad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

soit encore

$$\arg\{n_o(s_p)\} - \arg\{d_o(s_p)\} = (1+2\cdot\lambda)\cdot\pi$$

En factorisant $n_o(s)$ et $d_o(s)$, on a dans un premier temps

$$\arg\{(s_p - z_1)\cdot(s_p - z_2)\cdot\ldots\cdot(s_p - z_m)\} \\ - \arg\{(s_p - s_1)\cdot(s_p - s_2)\cdot\ldots\cdot(s_p - s_n)\} = (1+2\cdot\lambda)\cdot\pi$$

puis

$$\overbrace{\arg\{(s_p - z_1)\}}^{\alpha_1} + \overbrace{\arg\{(s_p - z_2)\}}^{\alpha_2} + \ldots + \overbrace{\arg\{(s_p - z_m)\}}^{\alpha_m} \\ - \left(\underbrace{\arg\{(s_p - s_1)\}}_{\beta_1} + \underbrace{\arg\{(s_p - s_2)\}}_{\beta_2} + \ldots + \underbrace{\arg\{(s_p - s_n)\}}_{\beta_n}\right) = (1+2\cdot\lambda)\cdot\pi$$

soit finalement

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j - \sum_{i=1}^{n}\beta_i = (1+2\cdot\lambda)\cdot\pi$$

Les angles α_j et β_i sont respectivement les angles formés par les segments $\overline{Z_j S_p}$ et $\overline{S_j S_p}$ avec l'axe réel (figure 7.3 page ci-contre). La combinaison de ces angles doit donc obéir à la condition ci-dessus pour que s_p appartiennent au lieu.

7.5.2 Condition des modules

Reprenant l'expression

$$\frac{n_o(s_p)}{d_o(s_p)} = -\frac{1}{k_o}$$

on en extrait le module

$$\left|\frac{n_o(s_p)}{d_o(s_p)}\right| = \left|-\frac{1}{k_o}\right|$$

On obtient successivement

$$\left|\frac{(s_p - z_1)\cdot(s_p - z_2)\cdot\ldots\cdot(s_p - z_m)}{(s_p - s_1)\cdot(s_p - s_2)\cdot\ldots\cdot(s_p - s_n)}\right| = \left|-\frac{1}{k_o}\right|$$

$$\frac{\overbrace{|(s_p - z_1)|}^{\overline{Z_1S_p}} \cdot \overbrace{|(s_p - z_2)|}^{\overline{Z_2S_p}} \cdot \ldots \cdot \overbrace{|(s_p - z_m)|}^{\overline{Z_mS_p}}}{\underbrace{|(s_p - s_1)|}_{\overline{S_1S_p}} \cdot \underbrace{|(s_p - s_2)|}_{\overline{S_2S_p}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{|(s_p - s_n)|}_{\overline{S_nS_p}}} = \frac{1}{k_o}$$

puis finalement :

$$k_o = \frac{\overline{S_1S_p} \cdot \overline{S_2S_p} \cdot \ldots \cdot \overline{S_nS_p}}{\overline{Z_1S_p} \cdot \overline{Z_2S_p} \cdot \ldots \cdot \overline{Z_mS_p}}$$

7.6 Tracé du lieu d'Evans

Les 9 règles les plus utiles à l'esquisse du lieu, selon [1], sont données ci-dessous sans démonstration.

1. L'équation caractéristique $d_c(s) = d_o(s) + k_o \cdot n_o(s)$ ayant n solutions, **le lieu d'Evans a n branches**.
2. Les coefficients de l'équation caractéristique étant réels, **le lieu d'Evans est symétrique par rapport à l'axe réel**.
3. Les points de départ du lieu correspondent à $k_o = 0$. Ceci a pour conséquence que $d_c(s) = d_o(s) + k_o \cdot n_o(s) = d_o(s)$ dont les solutions sont les racines de $d_o(s)$. **Les points de départ du lieu sont donc les pôles de $G_o(s)$, i.e. les pôles en boucle ouverte**.
4. Les point d'arrivée correspondent à $k_o \to \infty$. Cela implique que $d_c(s) = d_o(s) + k_o \cdot n_o(s) = 0 \approx k_o \cdot n_o(s)$ et que m pôles tendent donc vers les m racines de $n_o(s)$. On en déduit que m **pôles aboutissent aux zéros de $G_o(s)$**.
5. Les points d'arrivée des $(n - m)$ pôles restant sont situés à l'infini. Il rejoignent $(n - m)$ asymptotes d'angle

   $$\xi = \frac{(1 + 2 \cdot \lambda)}{(n - m)} \cdot \pi \quad \lambda \in Z$$

   formant une étoile régulière.
6. Le centre de l'étoile formée par les asymptotes est situé sur l'axe réel en

   $$\Delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n - m}$$

7. Tout point de l'axe réel situé à gauche d'un nombre impaire de pôles et de zéros réels fait partie du lieu.

8. Si pour une valeur particulière k_{ocr} de k_o, 1 pôle en boucle fermée est situé sur l'axe imaginaire en $s_{f1} = j \cdot \omega_{ocr}$, i.e. se situe à la limite de stabilité, l'équation caractéristique peut s'écrire :

$$\begin{aligned} d_c(s) &= d_o(s) + k_{ocr} \cdot n_o(s) \\ &= (s - s_{f1}) \cdot (s - s_{f2}) \cdot \ldots (s - s_{fn}) \\ &= (s - j \cdot \omega_{ocr}) \cdot (s - s_{f2}) \cdot \ldots (s - s_{fn}) \end{aligned}$$

   Ceci revient à dire que pour $k_o = k_{ocr}$, le polynôme $d_o(s) + k_{ocr} \cdot n_o(s)$ est divisible par $(s - j \cdot \omega_{ocr})$. **On obtient alors k_{ocr} et ω_{ocr} en annulant le reste de la division de $d_o(s) + k_{ocr} \cdot n_o(s)$ par $(s - j \cdot \omega_{ocr})$.**

9. Les points de séparation de l'axe réel sont donnés par les solutions de l'équation

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\mu - z_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu - s_i}$$

   S'il n'y pas de zéro, il faudra remplacer $\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\mu - z_j}$ par 0.

7.6.1 Exemple

On souhaite tracer le lieu d'Evans de

$$G_o(s) = \frac{k_o}{s} \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+4}$$

Application des règles 1 à 9 du tracé :

1. Le lieu d'Evans a $n = 3$ branches.
2. Le lieu d'Evans est symétrique par rapport à l'axe réel.
3. Les points de départ du lieu sont donc les pôles de $G_o(s)$, i.e. les pôles en boucle ouverte, soit $s_1 = 0 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$, $s_2 = -2 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ et $s_1 = -4 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$.
4. $m = 0$ pôles aboutissent aux zéros de $G_o(s)$.
5. Les points d'arrivée des $n - m = 3 - 0 = 3$ pôles restant sont situés à l'infini. Il rejoignent 3 asymptotes d'angle

$$\xi = \frac{(1 + 2 \cdot \lambda)}{(3 - 0)} \cdot \pi = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & (\lambda = 0) \\ 0 & (\lambda = 1) \\ -\frac{\pi}{3} & (\lambda = -1) \end{cases}$$

   formant une étoile régulière.

6. Le centre de l'étoile est situé sur l'axe réel en

$$\Delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n - m} = \frac{0 - 2 - 4 - 0}{3 - 0} = -2 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$

7. Tout point de l'axe réel situé à gauche d'un nombre impaire de pôles et de zéros réels fait partie du lieu. L'axe réel situé entre $s_1 = 0 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ et $s_1 = -2 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ et entre $s_1 = -4 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ et $-\infty$ fait donc partie du lieu.
8. Le lieu a visiblement 2 branches traversant l'axe imaginaire. On cherche donc à annuler le reste de la division de $d_o(s) + k_{ocr} \cdot n_o(s)$ par $(s - j \cdot \omega_{ocr}) \cdot (s + j \cdot \omega_{ocr}) = s^2 + \omega_{ocr}^2$. On a dans le cas de l'exemple :

$$\begin{array}{lllll|l}
s^3 & +6 \cdot s^2 & +8 \cdot s & +k_{ocr} & & s^2 + \omega_{ocr}^2 \\ \hline
s^3 & & +\omega_{ocr}^2 \cdot s & & & s + 6 \\
& 6 \cdot s^2 & +(8 - \omega_{ocr}^2) \cdot s & +k_{ocr} & & \\
& 6 \cdot s^2 & & +6 \cdot \omega_{ocr}^2 & & \\
& \text{Reste :} & (8 - \omega_{ocr}^2) \cdot s & +k_{ocr} - 6 \cdot \omega_{ocr}^2 & &
\end{array}$$

Si le reste est nul, il l'est indépendamment de toute valeur de s. Donc :

$$\begin{array}{lll}
8 - \omega_{ocr}^2 = 0 & \longrightarrow & \omega_{ocr} = 2 \cdot \sqrt{2} = 2.82 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \\
k_{ocr} - 6 \cdot \omega_{ocr}^2 = 0 & \longrightarrow & k_{ocr} = 6 \cdot \omega_{ocr}^2 = 48
\end{array}$$

9. Les points de séparation de l'axe réel sont donnés par les solutions de l'équation

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\mu - z_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu - s_i}$$

soit dans le cas de l'exemple :

$$0 = \frac{1}{\mu - 0} + \frac{1}{\mu - (-2)} + \frac{1}{\mu - (-4)}$$

On en déduit :

$$0 = (\mu + 2) \cdot (\mu + 4) + \mu \cdot (\mu + 4) + \mu \cdot (\mu + 2)$$

$$3 \cdot \mu^2 + 12 \cdot \mu + 8 = 0$$

d'où

$$\mu_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2 \cdot 3} = \ldots = -2 \pm \frac{4}{6} \cdot \sqrt{3} = \left\{ \begin{array}{l} -0.84 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \\ -3.4 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \end{array} \right\}$$

Compte tenu de la règle 7, seule la solution $\mu = -0.84 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ a un sens.

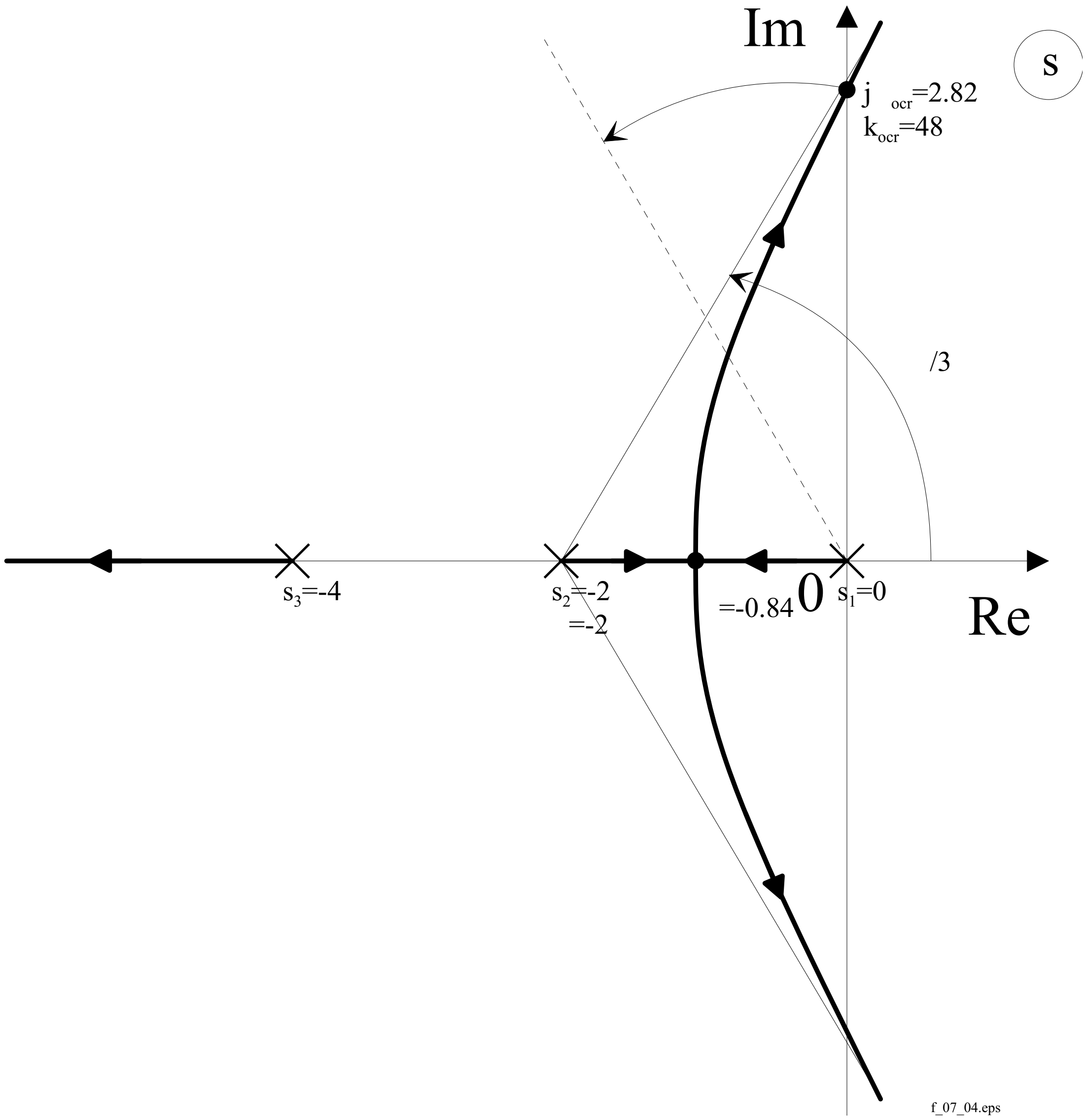


FIG. 7.4 – Esquisse du lieu d'Evans de $G_o(s) = \frac{k_o}{s} \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+4}$ obtenue en appliquant les règle 1 à 9 du tracé (f_07.dsf).

7.7 Valeurs particulières du gain k_o

– $k_o = k_{olim}$ = gain limite, soit le gain à partir duquel 2 des n pôles deviennent complexes.
– $k_o = k_{oop}$ = gain optimal, i.e. le gain à appliquer pour que les pôles (dominants) soient situés sur les 2 demi-droites équi-amortissement correspondant à $\zeta_{opt} \approx 0.5 \ldots 0.707$.
– $k_o = k_{ocr}$ = gain critique, i.e. le gain pour lequel 1 ou plusieurs des n pôles deviennent instables.

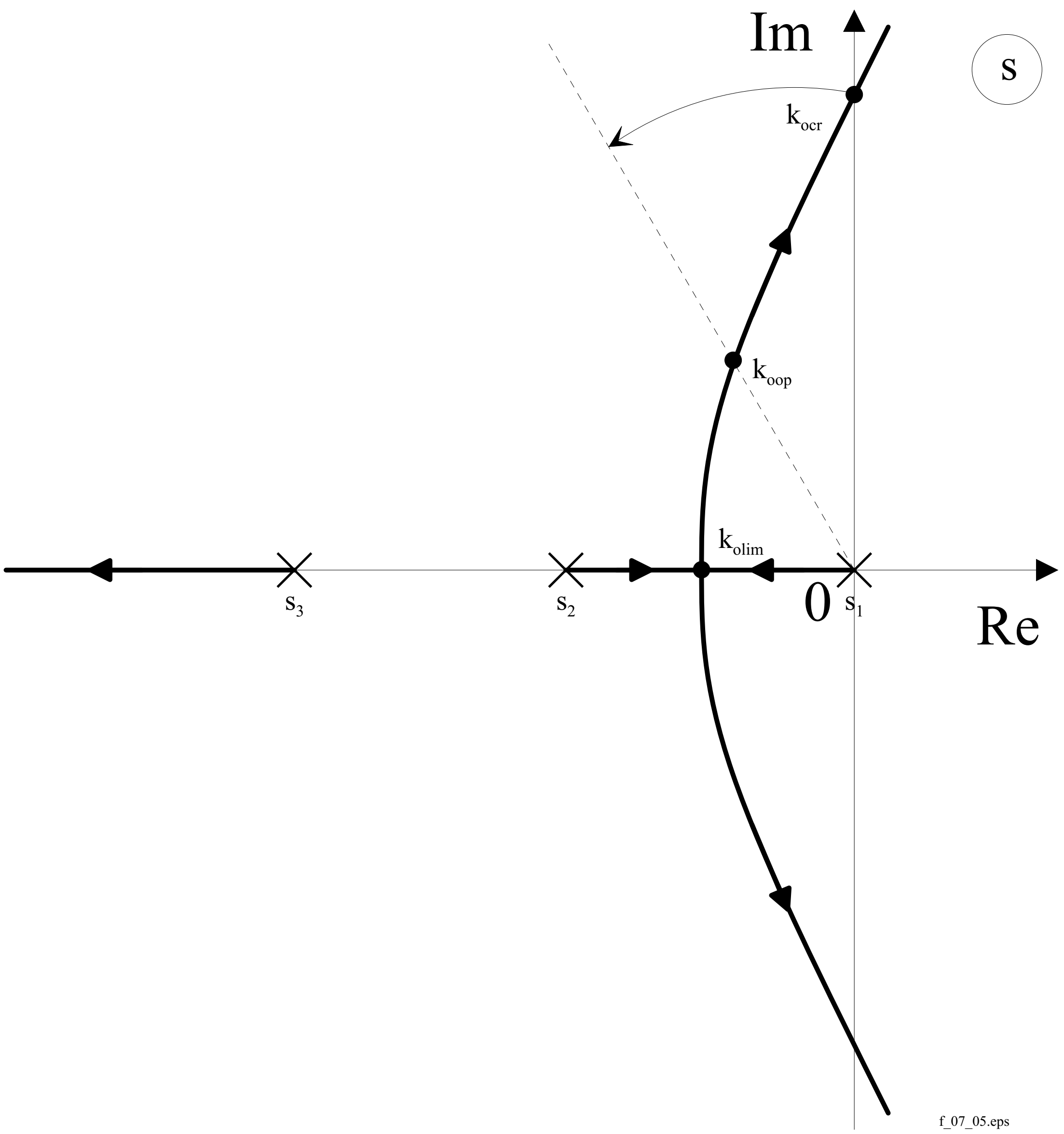


FIG. 7.5 – Définition des gains limite k_{olim}, optimal k_{oop} et critique k_{ocr} (f_07.dsf).

Ces gains peuvent être calculés à partir du tracé du lieu en appliquant la condition des modules :

$$k_o = \frac{\overline{S_1 S_p} \cdot \overline{S_2 S_p} \cdot \ldots \overline{S_n S_p}}{\overline{Z_1 S_p} \cdot \overline{Z_2 S_p} \cdot \ldots \overline{Z_m S_p}}$$

On rappelle que le facteur d'Evans k_o est lié au gain permanent de boucle K_o par la relation :

$$K_o = k_o \cdot \left| \frac{(-z_1) \cdot (-z_2) \cdot \ldots (-z_m)}{(-s_1) \cdot (-s_2) \cdot \ldots (-s_n)} \right|_{s_i \neq 0}$$

7.7.1 Exemple

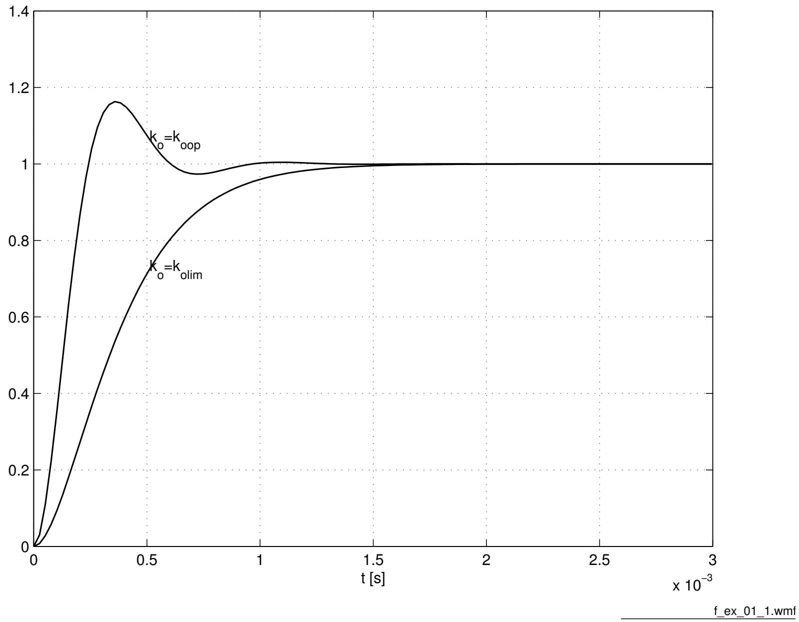


FIG. 7.6 – Réponses indicielle en boucle fermée, pour les 2 valeurs de k_o calculées (ex01.m).

Partant de l'exemple du § 7.4 page 252, on peut déterminer mathématiquement les gain limite k_{olim}, optimal k_{oop} et critique k_{ocr} :

- pour le gain limite, celui-ci est obtenu lorsque les pôles sont réels et confondus, soit pour $k_{olim} = \frac{s_1^2}{4}$;
- le gain optimal est obtenu pour $\Psi = \arcsin(\zeta) = 30$ [°]. Or :

$$\sin(\Psi) = \zeta = \frac{\delta}{\omega_n} = 0.5 = \frac{\frac{s_1}{2}}{\sqrt{(\frac{s_1}{2})^2 + \frac{4 \cdot k_o - s_1^2}{4}}}$$

On en déduit : $k_{oop} = s_1^2$

- le gain critique est visiblement (figure 7.2 page 253) infini, puisque le lieu ne franchit jamais l'axe imaginaire : $k_{ocr} = \infty$.

Les gains permanents (définis lorsque les fonctions de transfert sont sous forme Bode) ont pour expressions :

$$K_{olim} = k_{olim} \cdot \frac{\prod |z_j|}{\prod |s_i|} = \frac{s_1^2}{4} \cdot \frac{1}{|s_1|} = \frac{|s_1|}{4}$$
$$K_{oop} = k_{oop} \cdot \frac{\prod |z_j|}{\prod |s_i|} = s_1^2 \cdot \frac{1}{|s_1|} = |s_1|$$

La figure 8.3 page 272 montre la réponse indicielle en boucle fermée pour les 2 gains calculés.

7.8 Marges de stabilité absolue et relative

En se basant sur la condition fondamentale de stabilité, on a a priori la liberté de dimensionner un régulateur fixant des pôles en boucle fermée situés n'importe où dans le demi-plan complexe gauche (zone de stabilité). Avec les marges de stabilité absolue et relative, on restreint volontairement la zone où les pôles en boucle fermée peuvent se trouver, de façon à :

1. garantir que tous les modes temporels sont plus rapides que $e^{-\delta_{\min}\cdot t}$ (marge de stabilité absolue) ;
2. garantir que tous les modes temporels ont un taux d'amortissement ζ supérieur à une certaine limite $\zeta_{\min}$ (marge de stabilité relative).

La marge de stabilité absolue prend graphiquement la forme d'une droite verticale d'abcisse $-\delta_{\min}$ (figure 7.7 page ci-contre) à gauche de laquelle tous les pôles en boucle fermée devraient se trouver. Si elle garantit effectivement que tous les modes décroissent plus vites que $e^{-\delta_{\min}\cdot t}$, elle ne limite cependant pas le nombre d'oscillations avant stabilisation. Pour cela, c'est la marge de stabilité relative qui exclut tout le domaine du demi-plan complexe gauche où le taux d'amortissement ζ de pôles qui s'y trouveraient serait inférieur à $\zeta_{\min}$. Graphiquement (figure 7.8 page 264), la marge de stabilité relative se représente par 2 demi-droites issues de l'origine et formant un angle $\Psi_{\min} = \arcsin(\zeta_{\min})$ avec l'axe imaginaire. La combinaison des 2 marges forme un contour que l'on nomme **contour d'Evans**.

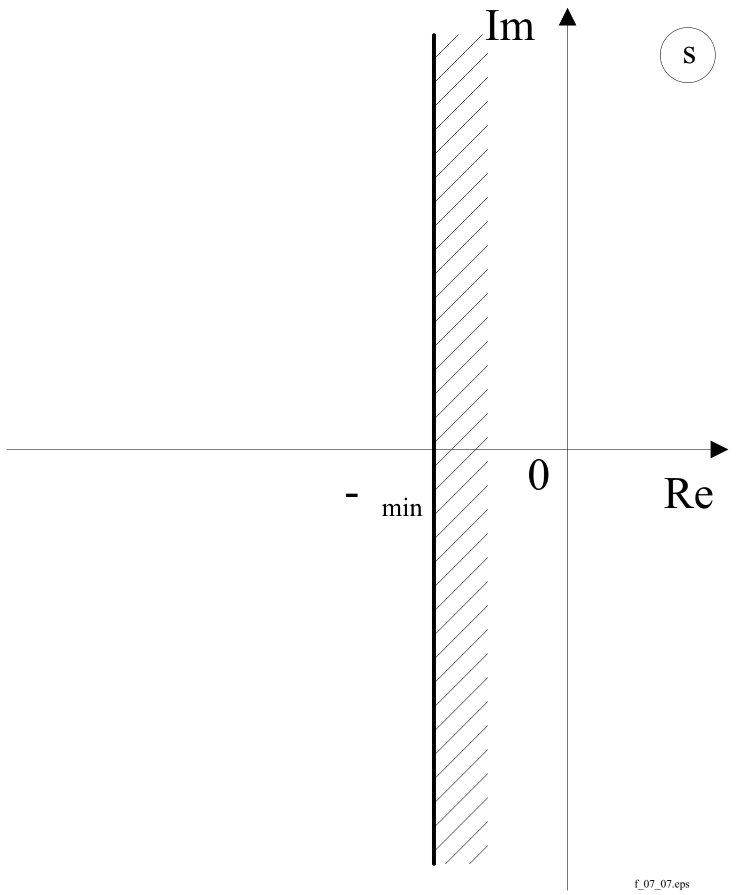


Fig. 7.7 – Marge de stabilité absolue (f_07.dsf).

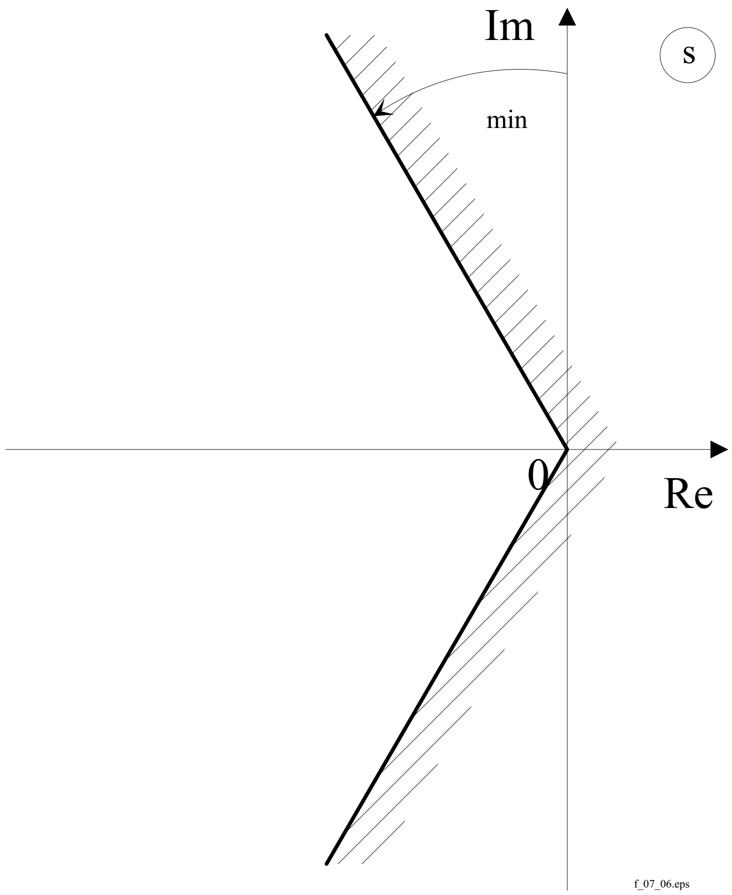


FIG. 7.8 – Marge de stabilité relative (f_07.dsf).

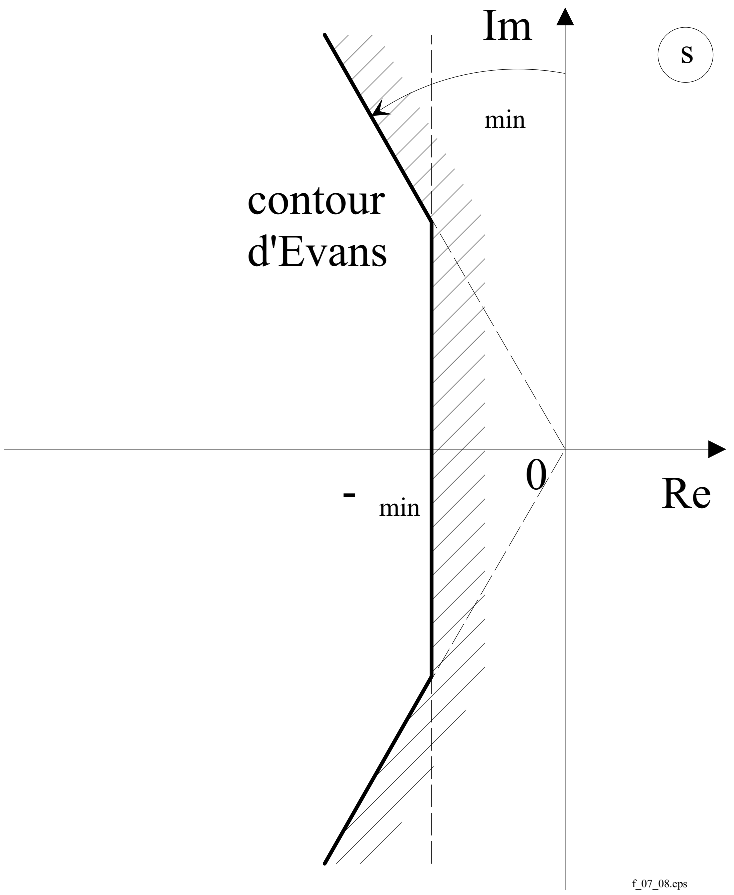


Fig. 7.9 – Contour d'Evans (f_07.dsf).

Chapitre 8

Synthèse fréquentielle (notes de cours)

8.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter une première technique de synthèse des régulateurs PI, PD et PID, i.e. une méthode permettant de calculer les paramètres K_p, T_i et T_d selon le type de régulateur choisi. Comme l'indique le titre du chapitre, la synthèse s'effectuera dans le domaine fréquentiel.

On se restreindra à la présentation de la méthode de synthèse dite de *compensation pôle-zéro*. D'autres méthodes sont détaillées dans la référence [1]. La technique de la compensation pôle-zéro est notamment très utilisée en électronique et consiste à placer un zéro z_{c1} du régulateur $G_c(s)$ situé au même endroit qu'un des pôles s_{a1} du système à régler $G_a(s)$ (figure 8.1 page suivante). En conséquence, le pôle s_{a1} disparaît de la boucle

$$\begin{aligned}
G_o(s) &= G_c(s) \cdot G_a(s) \\
&= \frac{K_c \cdot N_c(s)}{D_c(s)} \cdot \frac{K_a \cdot N_a(s)}{D_a(s)} \\
&= \left. \frac{K_c \cdot N_c'(s) \cdot (s - z_{c1})}{D_c(s)} \cdot \frac{K_a \cdot N_a(s)}{D_a(s)' \cdot (s - s_{a1})} \right|_{z_{c1} = s_{a1}} \\
&= \frac{K_c \cdot N_c'(s)}{D_c(s)} \cdot \frac{K_a \cdot N_a(s)}{D_a(s)'}
\end{aligned}$$

Cela a une action favorable sur le comportement dynamique, notamment lorsque le pôle s_{a1} compensé est lent, raison pour laquelle c'est en général le pôle dominant, i.e. la constante de temps dominante, que l'on compense.

La synthèse dans le domaine fréquentiel s'appuie sur le critère de Nyquist simplifié. En conséquence, **elle n'est applicable qu'aux systèmes stables en boucle ouverte**.

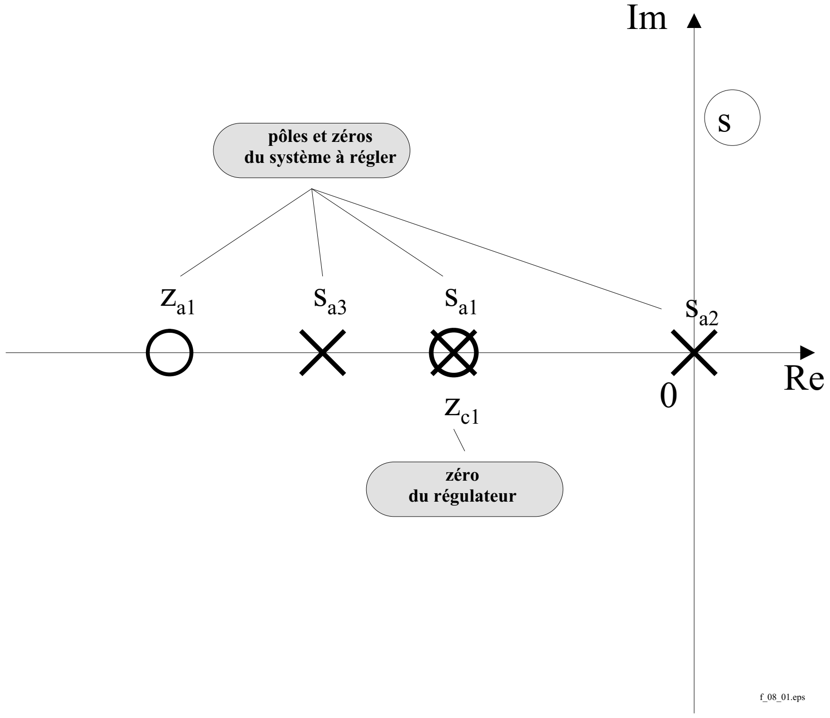


FIG. 8.1 – Compensation pôle-zéro : on place le zéro du régulateur z_{c1} au même endroit que l'un des pôles s_{a1} du système à régler (f_08.dsf).

Du point de vue fréquentiel, la compensation pôle-zéro revient à éliminer de la boucle un élément de type passe-bas ($\propto \frac{1}{1+s\cdot T}$), comme le montre la figure 8.2 page suivante.

8.2 Procédure d'ajustage d'un régulateur PI

On a :

$$G_c(s) = K_p \cdot \frac{1 + s \cdot T_i}{s \cdot T_i}$$

et

$$G_a(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_a}{s^\alpha} \cdot R_a(s)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est ainsi

$$G_o(s) = G_c(s) \cdot G_a(s) = \frac{K_o}{s^{\alpha+1}} \cdot (1 + s \cdot T_i) \cdot R_a(s)$$

avec

$$K_o = \frac{K_p \cdot K_a}{T_i}$$

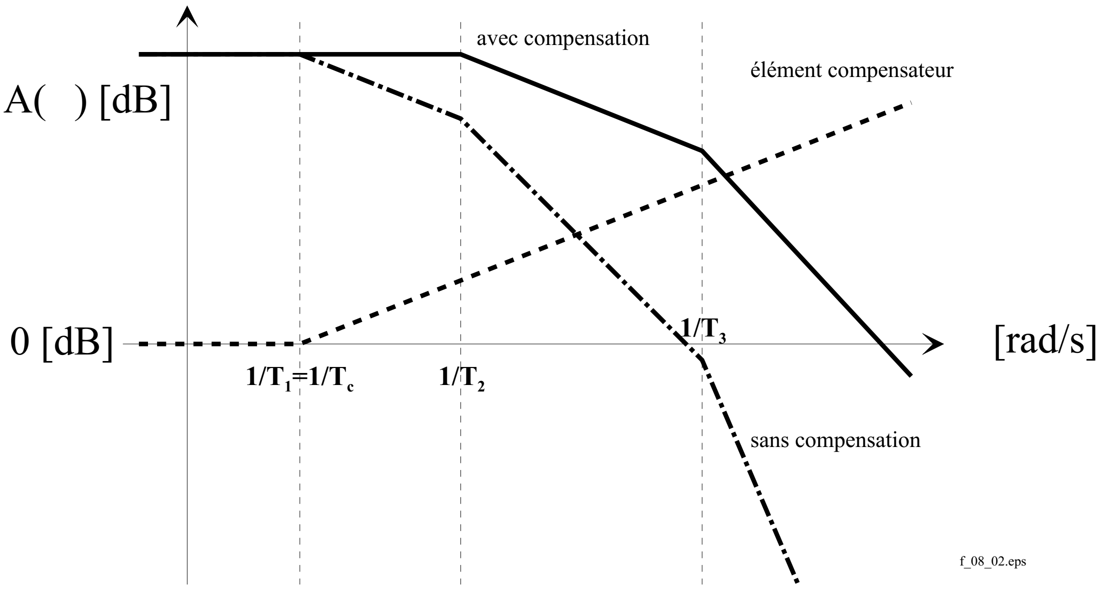


FIG. 8.2 – Compensation pôles-zéro : interprétation fréquentielle. La bande passante, i.e. la dynamique du système après compensation de la constante de temps dominante T_1, est améliorée (f_08.dsf).

La méthode proposée pour le calcul de K_p et T_i consiste à éliminer la constante de temps dominante T_{amax} du système à régler en posant $T_i = T_{max}$ et à ensuite appliquer la méthode de Bode pour trouver K_p :

1. Compenser la constante de temps dominante T_{amax} du système à régler en posant $T_i = T_{max}$
2. Appliquer la méthode de Bode pour trouver K_p

8.3 Procédure d'ajustage d'un régulateur PD

On a :

$$G_c(s) = K_p \cdot (1 + s \cdot T_d)$$

et

$$G_a(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_a}{s^\alpha} \cdot R_a(s)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est ainsi

$$G_o(s) = G_c(s) \cdot G_a(s) = \frac{K_o}{s^\alpha} \cdot (1 + s \cdot T_d) \cdot R_a(s)$$

avec

$$K_o = K_p \cdot K_a$$

La méthode d'ajustage de K_p et T_d est :

1. Compenser la constante de temps dominante T_{amax} du système à régler en posant $T_d = T_{max}$
2. Appliquer la méthode de Bode pour trouver K_p

8.4 Procédure d'ajustage d'un régulateur PID

On a :

$$G_c(s) = K_p \cdot \frac{1 + s \cdot T_i + s^2 \cdot T_i \cdot T_d}{s \cdot T_i}$$

et

$$G_a(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_a}{s^\alpha} \cdot R_a(s)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est ainsi

$$G_o(s) = G_c(s) \cdot G_a(s) = \frac{K_o}{s^{\alpha+1}} \cdot (1 + s \cdot T_i + s^2 \cdot T_i \cdot T_d) \cdot R_a(s)$$

avec

$$K_o = \frac{K_p \cdot K_a}{T_i}$$

Pour le calcul de K_p, T_i et T_d, on compense les 2 constantes de temps dominantes T_{amax1} et T_{amax2} du système à régler en posant

$$(1 + s \cdot T_i + s^2 \cdot T_i \cdot T_d) = (1 + s \cdot T_{amax1}) \cdot (1 + s \cdot T_{amax2})$$

et l'on applique ensuite la méthode de Bode pour trouver K_p :

1. Aompenser les 2 constantes de temps dominantes T_{amax1} et T_{amax2} du système à régler
2. Appliquer la méthode de Bode pour trouver K_p

8.4.1 Exemple

On considère le système à régler de fonction de transfert

$$G_a(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{100}{(1 + s \cdot 0.01) \cdot (1 + s \cdot 0.001) \cdot (1 + s \cdot 0.0001)}$$

On l'asservit avec un régulateur PID, en compensant les 2 constantes de temps dominantes de $G_a(s)$. On a :

$$\begin{aligned} G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} &= K_p \cdot \frac{1 + s \cdot T_i + s^2 \cdot T_i \cdot T_d}{s \cdot T_i} \\ &= \frac{\frac{K_p}{T_i}}{s} \cdot (1 + s \cdot \overbrace{0.01}^{T_{amax1}}) \cdot (1 + s \cdot \overbrace{0.001}^{T_{amax1}}) \\ &= \frac{\frac{K_p}{T_i}}{s} \cdot (1 + s \cdot \underbrace{0.011}_{T_i} + s^2 \cdot \underbrace{0.00001}_{T_i \cdot T_d}) \end{aligned}$$

On peut en déduire que

$$\begin{aligned} T_i &= 0.011\,[s] \\ T_d &= 0.00091\,[s] \end{aligned}$$

Il reste à calculer $G_o(s)$ en vue d'appliquer la méthode de Bode :

$$\begin{aligned} G_o(s) &= G_c(s) \cdot G_a(s) \\ &= \frac{\frac{K_p}{T_i}}{s} \cdot (1 + s \cdot 0.01) \cdot (1 + s \cdot 0.001) \cdot \frac{100}{(1 + s \cdot 0.01) \cdot (1 + s \cdot 0.001) \cdot (1 + s \cdot 0.0001)} \\ &= \frac{K_o}{s} \cdot \frac{1}{(1 + s \cdot 0.0001)} \end{aligned}$$

avec $K_o = \frac{K_p \cdot 100}{T_i}$. Le tracé asymptotique du diagramme de Bode de $G_o(s)$ est donné sur la figure 8.3 page suivante.

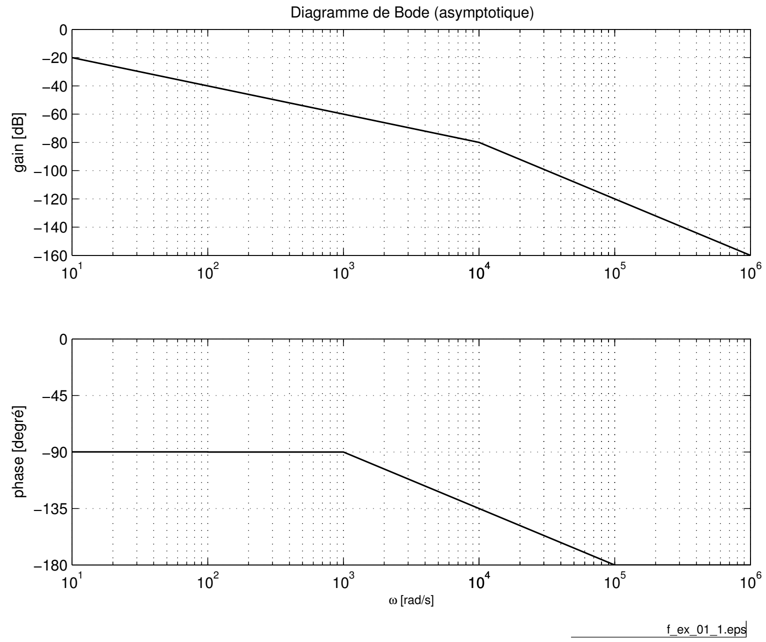


Fig. 8.3 – Diagramme de Bode de $G_o(s)$ (f_ex01.m).

On en déduit

$$K_o = 83\,[\mathrm{dB}] \approx 14100$$

d'où

$$K_p = \frac{K_o \cdot T_i}{K_a} = \frac{14100 \cdot 0.011}{100} = 1.55$$

Le régulateur PID synthétisé a donc pour paramètres :

$$\begin{aligned} K_p &= 1.55 \\ T_i &= 0.011\,[\mathrm{s}] \\ T_d &= 0.00091\,[\mathrm{s}] \end{aligned}$$

La réponse indicielle en boucle fermée, régulation de correspondance, est tracée sur la figure 8.4 page suivante.

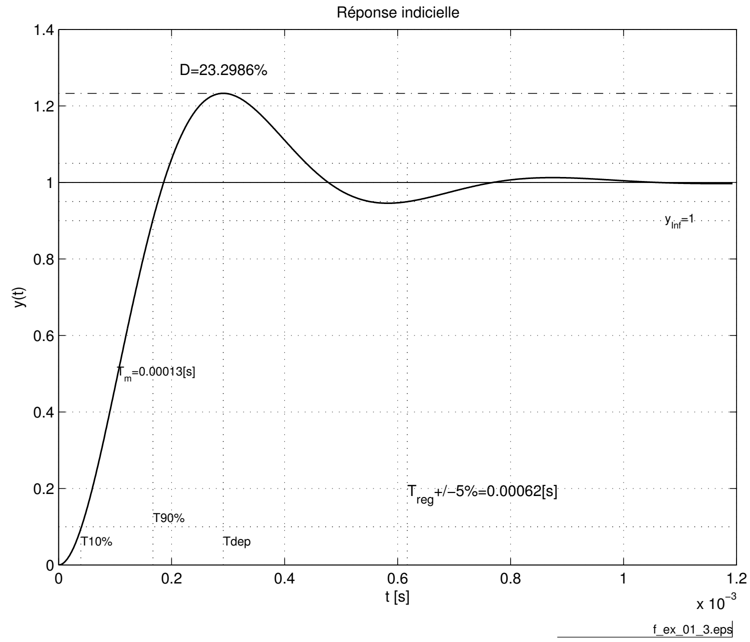


FIG. 8.4 – Réponse indicielle en boucle fermée, régulation de correspondance (f_ex_01.m).

On remarque que le comportement en boucle fermée est très satisfaisant. En particulier, les pôles dominants ont manifestement un très bon taux d'amortissement ($\zeta \approx 0.5$), bien que celui-ci n'ait pas été imposé explicitement lors de la synthèse. C'est grâce à la marge de phase φ_m de 45 [°] qu'un tel résultat peut être obtenu dans une majorité de cas : on peut faire l'association

$$\zeta \approx 0.5 \longleftrightarrow \varphi_m \approx 45\ [°]$$

Bibliographie

[1] Régulation automatique, L.Maret, 1987, PPUR, bibliothèque eivd 40.110-11

[2] Modern Control systems, Dorf et Bishop, 1995, Addison-Wesley

[3] Linear systems, Th.Kailath, 1980, Prentice-Hall, bibliothèque eivd 32.100-36

[4] Einführung in die Regelungstechnik, W.Leonhard, Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1985

[5] Electronique de réglage et de commande, H.Bühler, Traité d'Electricité, vol. XVI, PPUR

[6] Théorie et traitement des signaux, Traité d'Electricité, vol.VI, F.de Coulon, 1984, Presses Polytechniques Romandes, bibliothèque eivd 32.100-23

[7] Feedback control theory, Doyle, Francis, Tannenbaum, Maxwell Macmillan international editions, 1992, bibliothèque eivd 40.112-04

[8] Modern Control system Theory and Design, Stanley M. Shinners, John Wiley and Sons, Inc, bibliothèque eivd 40.132-32/01

[9] Entraînements réglés, Michel Etique, cours polycopié de l'école d'ingénieurs du canton de Vaud (eivd), 2002, `http://iai1.eivd.ch/node5.htm`

[10] Régulation numérique, Michel Etique, cours polycopié de l'école d'ingénieurs du canton de Vaud (eivd), 2002, `http://iai1.eivd.ch/node3.htm`

[11] site Web de Control Systems Society de l'IEEE, octobre 2003, `http://www.ieeecss.org/about/ABOUTindex.html`

Version du document	Date	Notes
v1.0	11 décembre 2001	
v1.1	mars 2002	
v1.2	26 juin 2002	
v1.3	octobre-décembre 2002	
v1.4	mars-juillet 2003	
v1.5	octobre 2003	exemples chap.1

Tab. 8.1 – Versions publiées