Chapitre 2

Notion de probabilité

et généralités

1

I) Définitions et vocabulaire

On donne les définitions et le vocabulaire de bases qui seront utilisés dans les paragraphes et les chapitres suivants.

☞ Expérience (ou épreuve) aléatoire : C'est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat avec certitude.
Cependant les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont connus a priori.

Exemples: - Jeter un dé à six faces.
- Tirer une boule dans un urne.

2

☞ Espace (ou ensemble) fondamental : C'est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Généralement on le note Ω (oméga).

☞ Un élément de Ω est appelé événement élémentaire (ou éventualité), on le note ω.

☞ Une partie de Ω est appelée événement.

Exemple: Pour le jet d'un dé à six faces, on a,

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3 est un événement élémentaire.

E= $\{3, 6\}$ est un événement.

3

☞ Ω est appelé événement certain.

☞ $\emptyset$ est appelé événement impossible.

☞ Deux événements A et B sont dites incompatibles s'ils ne se réalisent pas simultanément c.à.d $A \cap B = \emptyset$.

Exemple: Pour le jet d'un dé à six faces, les événements A=« avoir un nombre pair » et

B=« avoir un nombre impair » sont incompatibles

Remarque: Ω peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable.

4

☞ On appelle tribu d'événements sur Ω toute partie $\boldsymbol{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ vérifiant :

i) $\Omega \in \boldsymbol{A}$

ii) Si $E \in \boldsymbol{A}$, alors $E^c \in \boldsymbol{A}$

iii) Si $(E_i)_{i \in N}$ est une suite dénombrable d'éléments de $\boldsymbol{A}$, alors $\bigcup_{i \in N} E_i \in \boldsymbol{A}$.

($\boldsymbol{A}$ est stable par les opérateurs $\cup$ et ^{c})

Remarque: Généralement, si Ω est fini on prend $\boldsymbol{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et dans ce cas, la condition iii) se réduit à,

si $E_1 \in \boldsymbol{A}$ et $E_2 \in \boldsymbol{A}$, alors $E_1 \cup E_2 \in \boldsymbol{A}$.

5

☞ Le couple $(\Omega, \boldsymbol{A})$ est appelé espace probabilisable.

☞ On appelle probabilité (ou lois de probabilité) sur l'espace probabilisable $(\Omega, \boldsymbol{A})$, toute application P de $\boldsymbol{A}$ dans $[0 , 1]$ vérifiant:

i) $P(\Omega) = 1$ (axiome de normalisation)

ii) Pour toute suite $(E_i)_{i \in N}$ d'événements de $\boldsymbol{A}$ incompatibles deux à deux, on a:

$$P(\bigcup_{i \in N} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

(axiome complet des probabilités totales).

6

En particulier si E_1 et E_2 sont deux événements incompatibles on a:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2).$$

Où P(E) désigne la probabilité de l'événement E.

☞ Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Remarque : Pour tout $E \in \mathcal{A}$, on a toujours,

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

☞ Si Ω est fini ou infini dénombrable, on définit une lois de probabilité comme une

7

application P de Ω dans [0 , 1] vérifiant :

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

Ainsi, pour déterminer la loi de probabilité, il suffit de connaître les probabilités de tous les événements élémentaires.
Et pour tout événement $E \subset \Omega$, on a:

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\omega)$$

8

Exemple: Soit une expérience aléatoire qui a 7 résultats possibles dont les probabilités sont les suivantes:

Evénement élémentaire ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
$P(\omega_i)$	0,2	0,1	0,1	0,3	0,15	0,05	0,1

Pour $A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_5\}$, on a:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = P(\omega_2) + P(\omega_4) + P(\omega_5)$$

$$= 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}15 = 0{,}55.$$

9

☞ Si Ω est fini et si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité de ces événements et que la loi de probabilité est uniforme. On montre alors que la loi de probabilité est définie par :

$$P : \Omega \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$
$$\omega \longmapsto P(\omega) = 1/\mathrm{card}(\Omega)$$

Ainsi, pour tout événement $E \subset \Omega$, on a:

$$P(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

10

Exemple: Pour le jet d'un dé équilibré, soit A=« avoir un multiple de 3 » ={3; 6}.
La loi est uniforme et on a card(Ω)=6 et card(A)=2. Donc P(A)=2/6 =1/3=0,3333.

☞ Si A est un événement d'un espace fondamental Ω tel que P(A) ≠ 0, et B un événement quelconque de Ω, la probabilité de B sachant que A est réalisé est appelée la probabilité conditionnelle de B sachant A. On la note P(B/A) et elle est définie par :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

11

Exemple: Pour le jet d'un dé équilibré, soient
A =« avoir un multiple de 3 » ={3; 6} ,
B = «avoir un six »= {6}.
C = «avoir un as »= {1}.
D = «avoir un nombre impair »= {1, 3, 5}.

i) $A \cap B$ = {6}, P(A)= 2/6 et $P(A \cap B)$=1/6, donc, P(B/A)=(1/6)/(2/6) =1/2=0,5.

ii) $A \cap C = \emptyset$ donc $P(A \cap C)$=0 d'où, P(C/A)=0/(2/6) =0.

iii) $A \cap D$ = {3}, P(D)= 3/6 et $P(A \cap D)$=1/6, donc, P(D/A)=(1/6)/(2/6) =1/2=0,5=P(D).

12

On remarque que : P(B/A) =0,5>P(B)=1/6, P(C/A)=0<P(C)=1/6 et P(D/A)=P(D)=0,5.
On vérifie aussi que P(A/D)=P(A)=1/3.
On dit que les probabilités conditionnelles de B et C dépendent de la réalisation de A, alors que la probabilité conditionnelle de D est indépendante de la réalisation de A.

13

☞ Soient A et B deux événements d'un espace fondamental Ω tels que, $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on dit que A et B sont indépendants si:

P(B/A)=P(B) ou P(A/B)=P(A).

Par conséquent, la condition nécessaire et suffisante pour que A et B soient indépendants est donnée par:

$P(AB)=P(A)\times P(B)$.

14

II) Propriétés d'une loi de probabilité

1) Propriétés générales

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, P). Alors on a:

☞ $P(A^c)=P(\Omega)-P(A) = 1-P(A)$.

☞ Si $A\subset B$ alors $P(A)\leq P(B)$.

☞ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Mais si, A et B sont incompatibles ($A\cap B=\emptyset$), on a: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

15

☞ Plus généralement, pour une famille de n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ on a la formule de Poincaré: (théorème des probabilités totales)

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_i A_j A_k) - \ldots\ldots (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \ldots\ldots A_n).$$

16

☞ Mais, si les A_i sont incompatibles deux à deux, c.à.d. $A_i\cap A_j=\emptyset$ pour $i \neq j$, alors on a:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

☞ En particulier, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment un système complet d'événements de Ω, c.à.d. ($A_i\cap A_j=\emptyset$ pour $i \neq j$ et $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$) alors on a :

$$P(\Omega) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

17

☞ $P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$ ou $P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})$.

☞ $P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)$ ou $P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$.

☞ Soit C est un événements de Ω tel que $P(C)\neq 0$, alors on a:

- $P(\bar{A}/C)=1-P(A/C)$.
- $P[(A\cup B)/C]=P(A/C)+P(B/C)-P[(AB)/C]$.

Exercice: Montrer que si A et B sont indépendants alors, A et B^c, A^c et B, A^c et B^c sont aussi indépendants.

18

2) Théorème des probabilités composées

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements de Ω tels que $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \neq 0$, alors on a:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \times P(A_2 / A_1) \times P(A_3 / A_1 A_2) \times \ldots \times P(A_n / A_1 A_2 \ldots A_{n-1}).$$

En particulier pour n=2 , on retrouve:

$P(A_1A_2)=P(A_1)\, P(A_2/A_1)$.

19

☞ Indépendance totale et deux à deux

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements de Ω.

- On dit que ces événements sont totalement (ou mutuellement) indépendants si pour tout entier k ($2 \leq k \leq n$), on considère k événements distincts parmi les n, alors ils sont indépendants.
- On dit que ces événements sont deux à deux indépendants si, on considère 2 événements distincts parmi les n, alors ils sont indépendants.

20

Remarques :

i) Des événements qui sont mutuellement indépendants sont en particulier deux à deux indépendants mais la réciproque n'est pas vraie.

ii) D'après le théorème des probabilités composées, si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants , alors on a:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times \ldots \times P(A_n).$$

21

Exercice d'application: Soit une boîte contenant 20 composants électroniques dont 4 sont défectueux. On y tire au hasard et successivement 3 composants, avec remise si le composant est normal, sinon on le garde.

1) Calculer la probabilité d'avoir les trois composants défectueux.
2) Calculer la probabilité d'avoir les trois composants normaux.

22

Solution: Si on note les événements,

D^i =« avoir un cp. défectueux au $i^{ème}$ tirage ».

N^i =« avoir un cp. normal au $i^{ème}$ tirage ».

1) $P(D^1D^2D^3)= P(D^1)P(D^2 /D^1)P(D^3 /D^1D^2)$
$= (4/20)\times(3/19) \times(2/18)=0,0035$.

2) $P(N^1N^2N^3) = P(N^1)P(N^2/N^1)P(N^3/N^1N^2)$
$=P(N^1)P(N^2)P(N^3)=(16/20)\times(16/20)\times(16/20)$
$=(4/5)^3 = 0,512$.

23

3) Théorème de Bayes *(Probabilités des causes)*

Soient $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ une partition (ou un système complet d'événements) de Ω, et R un événement tel que $P(R)\neq 0$. Etant données :

i) Les probabilités a priori $P(E_1), P(E_2), \ldots, P(E_n)$.

ii) Les probabilités conditionnelles $P(R/E_1), P(R/E_2), \ldots, P(R/E_n)$.

Alors on a les probabilités a posteriori :

$$P(E_i / R) = \frac{P(E_i R)}{P(R)} = \frac{P(E_i)P(R/E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(R/E_j)}.$$

24

Exercice d'application: Dans une usine, 3 machines fabriquent des pièces mécaniques dans les proportions respectives suivantes: p_1=25%, p_2=35% et p_3=40%. On sait que le les taux de production de pièces défectueuses par les 3 machines sont respectivement de 10%, 5% et 1%.

On choisit au hasard une pièce dans un lot de pièces fabriquées par l'usine et on constate qu'elle est défectueuse. Quelle est probabilité qu'elle soit fabriquée par la 3ème machine?

25

Solution: Si on note les événements,

D =« la pièce est défectueuse».

M_i =« la pièce est fabriquée par la ième machine ».

On a:

i) $P(M_1)=0{,}25$; $P(M_2)=0{,}35$ et $P(M_3)=0{,}4$.

ii) $P(D/M_1)=0{,}1$; $P(D/M_2)=0{,}05$ et $P(D/M_3)=0{,}01$.

Donc par le théorème de Bayes on calcule la probabilité a posteriori $P(M_3/D)$:

$$P(M_3/D)=\frac{P(M_3)P(D/M_3)}{\sum_{j=1}^{3}P(M_j)P(D/M_j)}=\frac{0{,}004}{0{,}0465}=0{,}086.$$

26

4) Lois des tirages probabilistes

Assez souvent on est amené dans la pratique a effectuer des tirages probabilistes (au hasard) dans une population pour en extraire des échantillons (Sondages, Enquêtes, Contrôle, …).

Supposons qu'on a une population de N individus répartis en k catégories de tailles respectives N_1, N_2, … et N_k avec,

$$\sum_{i=1}^{k}N_i=N.$$

27

On pose $p_i=N_i/N$ la proportion des individus de la ième catégorie dans la population.

Si on choisit au hasard n individus dans la population, on cherche à calculer la probabilité d'avoir un échantillon constitué de : n_1 individus de la catégorie 1, n_2 de la catégorie 2, … et n_k de la catégorie k avec, $\sum_{i=1}^{k}n_i=n.$

Le calcul de cette probabilité, que l'on note $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, dépend du mode de tirage et de l'ordre des individus. Ainsi on a

28

a) Tirage avec remise et avec ordre

Si on désigne par E la population des N individus, alors l'espace fondamental associé à cette expérience aléatoire est égal à l'ensemble de tous les n-échantillons ordonnés et avec répétition.

On a $\Omega_1=E^n$, $card(\Omega_1)=N^n$ et la loi de probabilité sur Ω_1 est uniforme. D'où :

$$P_1(n_1,n_2,\ldots,n_k)=\frac{N_1^{n_1}\times N_2^{n_2}\times\ldots\times N_k^{n_k}}{N^n}$$
$$=p_1^{n_1}\times p_2^{n_2}\times\ldots\times p_k^{n_k}.$$

29

b) Tirage sans remise et avec ordre

Ω_2 = l'ensemble de tous les n-échantillons ordonnés et sans répétition.

On a, $card(\Omega_2)=A_N^n$ et la loi de probabilité sur Ω_2 est uniforme. D'où :

$$P_2(n_1,n_2,\ldots,n_k)=\frac{A_{N_1}^{n_1}\times A_{N_2}^{n_2}\times\ldots\times A_{N_k}^{n_k}}{A_N^n}.$$

30

c) Tirage sans remise et sans ordre

Ω_3 = l'ensemble de tous les n-échantillons non ordonnés et sans répétition ou bien (les parties de E ayant n éléments).

On a, card(Ω_3)= C_N^n et la loi de probabilité sur Ω_3 est uniforme. D'où :

$$P_3(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{C_{N_1}^{n_1} \times C_{N_2}^{n_2} \times \ldots \times C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}.$$

31

Remarques :

i) Ce tirage est équivalant au tirage des n individus simultanément.

ii) Dans le cas particulier où k=2, on a :

$$P_3(n_1, n_2) = \frac{C_{N_1}^{n_1} \times C_{N_2}^{n_2}}{C_N^n}.$$

C'est la loi hypergéométrique.

32

d) Tirage avec remise et sans ordre

Ω_4 = l'ensemble de tous les n-échantillons non ordonnés et avec répétition.

On a, card(Ω_4) = K_N^n et la loi de probabilité sur Ω_4 n'est pas uniforme.

Dans ce cas on se ramène à l'utilisation de la loi de probabilité uniforme sur Ω_1 (espace associé à la même expérience 'tirage avec remise') pour calculer les probabilités des événements élémentaires de Ω_4.

33

Ainsi, à chaque n-échantillon de Ω_4 on associe tous les n-échantillons de Ω_1 qui le réalisent. Or, on a autant de ces n-échantillons que de permutations avec répétition de n individus dont n_1 de la catégorie 1, n_2 de la catégorie 2, … et n_k de la catégorie k, c.à.d

$$p_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}$$

et chacun de ces n-échantillons de Ω_1 a une probabilité égale à $P_1(n_1, n_2, \ldots, n_k)$

34

D'où :

$$P_4(n_1, n_2, \ldots, n_k) =$$
$$p_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) \times P_1(n_1, n_2, \ldots, n_k)$$
$$= \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!} \times p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times \ldots \times p_k^{n_k}.$$

C'est la loi multinomiale.

Remarque : Si k=2, on a la loi binomiale,

$$P_4(n_1, n_2) = \frac{n!}{n_1! \times n_2!} \times p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} = C_n^{n_1} \times p_1^{n_1} \times p_2^{n_2}$$

35