Feuille d'exercices n° 1

1 Exercices.

Exercice 1. *Produit matriciel* Calculer les produits AB et BA, quand ils existent, dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = {}^t\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Indication. *Noter que* A *et* B *sont des matrices diagonales par bloc.*

■

Exercice 2. *Représentation d'une application linéaire.* Donner la représentation matricielle des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces en jeu.

1. $f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + 2y + 3z, 2y - z, x + z) \end{cases}$.
2. la projection dans $\mathbf{R}^2$ sur la droite engendrée par $e_1 = (2, 1)$ parallèlement à $e_2 = (1, 1)$.
3. la symétrie dans $\mathbf{R}^2$ par rapport à la droite engendrée par e_1 parallèlement à e_2 (on rappelle que c'est l'application linéaire qui envoie e_1 sur e_1 et e_2 sur $-e_2$).
4. $f : \begin{cases} \mathbf{R}_2[X] & \to \mathbf{R}_2[X] \\ P & \mapsto 2(X+1)P - (X^2 - 1)P' \end{cases}$.

■

Exercice 3. On considère l'espace $\mathbf{R}^3$ muni de la base canonique B.

1. Montrer que $u_1 = (2, -1, -2)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (-2, 1, 3)$ forment une base B′ de $\mathbf{R}^3$.
2. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices de passage d'une base à l'autre.
3. Calculer la matrice de f dans la base B′.

■

Exercice 4. On considère l'espace $\mathbf{R}^2$ muni de la base canonique $B = (e_1, e_2)$. Soit f l'application linéaire donnée par

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto (2u, -v) \end{cases}.$$

dans la base B.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base B.
2. Montrer que les vecteurs $e'_1 = (3, 1)$ et $e'_2 = (5, 2)$ forment une base B′ de $\mathbf{R}^2$.
3. Déterminer la matrice A′ de f dans le base B′ en calculant $f(e'_1)$ et $f(e'_2)$.
4. Calculer les matrices de passage P et Q entre les bases B et B′.
5. Déterminer A′ par le formule de changement de base.
6. Calculer les matrices de f^5 dans les deux bases Indication. $A = PA'P^{-1}$ *implique que* $A^n = PA'^nP^{-1}$.

■

Exercice 5. On considère l'espace $\mathbf{R}^3$ muni de la base canonique. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y+z, 2x-z, -3x+y+3z) \end{cases}.$$

1. Déterminer une base de $\ker f$ et en déduire la dimension de $\operatorname{Im} f$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique et
   (a) vérifier que les vecteurs colonnes de A sont liés et en déduire une base de $\operatorname{Im} f$.
   (b) vérifier que $\ker f$ est orthogonal (pour le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^3$) aux vecteurs lignes de A.
3. L'équation $f(x,y,z) = (1,-2,-1)$ a-t-elle des solutions ? Faire deux preuves différentes.
4. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $f(x,y,z) = (1,2,-3)$? Plus généralement, décrire l'ensemble des solutions de l'équation $f(x,y,z) = \mathrm{Y}$, lorsque $\mathrm{Y} \in \operatorname{Im} f$.

2 Faire ses gammes.

Exercice 6. Écrire les systèmes suivants sous forme matricielle et à l'aide d'applications linéaires de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$. Les résoudre par la méthode de Gauss.

$$(1)\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=2 \\ x+3y+4z=3 \end{cases} \quad (2)\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+2y-z=2 \\ x+2y+3z=1 \end{cases} \quad (3)\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ x+3y+4z=2 \end{cases} \quad (4)\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y+3z=2 \\ x+4z=2 \end{cases} \quad (5)\begin{cases} x+3y-z &= 9 \\ 3x+9y-3z &= 27 \\ -2x+y-5z &= 10 \end{cases}$$

Exercice 7. Pour chaque matrice M calculer en posant un système la matrice inverse M^{-1}.

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Donner la répresentation matricielle de l'application f dans la base B.

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-3y \end{pmatrix};\ \mathrm{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x-y+z \\ x-3z \\ x+y+z \end{pmatrix};\ \mathrm{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix};\ \mathrm{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x-y-z \\ 0 \end{pmatrix};\ \mathrm{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Exercice 9. Calculer la matrice de passage P de la base B vers la base B'.

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right), B' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right), B' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), B' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right), B' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

■

Exercice 10. Calculer la matrice M de f dans la base B. Calculer la matrice de passage P de B vers B'. Calculer l'inverse P^{-1} et en déduire la matrice de f dans la base B', $N = P^{-1}MP$. Recalculer N directement et vérifier vos calculs.

$$f(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}, B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right), B' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

$$f(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x-2y+z\\x+y\\x+y+z\end{pmatrix}, B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right), B' = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$f(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}, B = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right), B' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, (1,-1)\right)$$

$$f(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x-2y+z\\x+y\\x+y+z\end{pmatrix}, B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right), B' = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right)$$

■

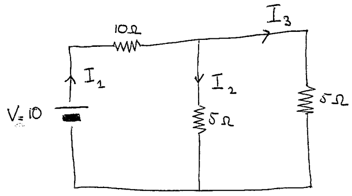
3 Applications et exercices plus sophistiquées.

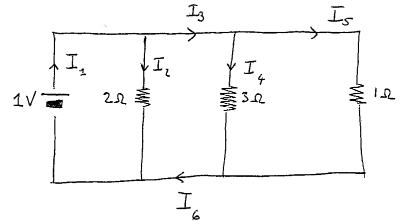
Exercice 11. *Applications à la chimie* Equilibrer les réactions suivantes à l'aide d'un système linéaire.

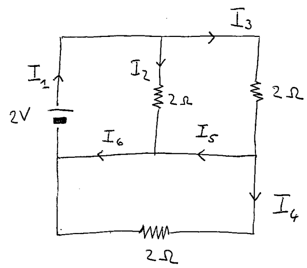
1. $NaCl + BeF_2 --> NaF + BeCl_2$
2. $Fe + Cl_2 --> FeCl_3$
3. $KMnO_4 + HCl --> KCl + MnCl_2 + H_2O + Cl_2$
4. $K_4Fe(CN)_6 + H_2SO_4 + H_2O --> K_2SO_4 + FeSO_4 + (NH_4)_2SO_4 + CO$
5. $C_6H_5COOH + O_2 --> CO_2 + H_2O$
6. $K_4Fe(CN)_6 + KMnO_4 + H_2SO_4 --> KHSO_4 + Fe_2(SO_4)_3 + MnSO_4 + HNO_3 + CO_2 + H_2O$
7. $PhCH_3 + KMnO_4 + H_2SO_4 --> PhCOOH + K_2SO_4 + MnSO_4 + H_2O$

■

Exercice 12. *Applications à l'éléctronique* Pour chacun de ces trois circuits éléctroniques, utiliser la première et deuxième loi de Kirchoff pour établir un système d'équations linéaires dans les courants $I_1, I_2 \ldots$ etc. et résoud-le.







Exercice 13. *Analyse des signaux* Dans l'analyse des signaux, il est souvent nécesssaire de décomposer un signal $f(t)$ en une superposition d'ondes exponentielles $e^{i\mu t}$.

Après avoir mesuré m fois le signal $f(t)$ à des temps $t = 0, 1, \ldots, m-1$, nous connaissons les valeurs $f(0), f(1)\ldots, f(m-1)$. Nous cherchons à trouver une fonction de la forme

$$g(t) = \lambda_0 1 + \lambda_1 e^{2\pi i t/m} + \lambda_2 e^{4\pi i t/m} + \ldots + \lambda_m e^{2(m-1)\pi i t/m}$$

qui interpole les valeurs mesurées pour les $f(i)$s, cad, telle que

$$f(0) = g(0), f(1) = g(1), \ldots f(m-1) = g(m-1).$$

1. Montrer que ceci est le cas si et seulement si
$$\mathrm{M}\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(m-1) \end{pmatrix}$$
ou M est la matrix donnée par l'équation $m_{jl} = e^{2(j-1)(l-1)\pi i/m}$.
2. Soient $\mathrm{M}_j, \mathrm{M}_k$ le j-ieme et k-ieme colonne de M, que nous considérons en tant que vecteurs. Montrer que $\mathrm{M}_j.\mathrm{M}_k = \sum_{l=0}^{l=m-1}(e^{2(j+k-2)\pi i/m})^l$. En déduire que $\mathrm{M}_j.\mathrm{M}_k = 0$ si $j+k-2$ n'est pas un multiple de m et $\mathrm{M}_j.\mathrm{M}_k = m$ sinon.
3. Montrer que si M et N sont des matrices telles que $\mathrm{M}_j.\mathrm{N}_k = 1$ si $j = k$ et 0 sinon alors ${}^t\mathrm{N}\mathrm{M} = \mathrm{Id}$. Déduire M^{-1}.
4. Donner les λ_js en fonction des $f(k)$s.
5. Vous devez programmer sur ordinateur un script qui prendra comme données les valeurs $f(j)$ et qui donnera les coefficients λ_k. Serait il à votre avis plus pertinent de faire le calcul par résolution d'un système ou en utilisant le formule trouvé ci-dessus ? Pourquoi ?

Exercice 14. *Applications à l'économie et la théorie de la stratégie.* Un jeu de stratégie dont le but est le partage d'un butin oppose deux joueurs.

A chaque tour un joueur peut choisir entre trois stratégies, 1, 2 et 3. Lorsque le stratégie i rencontre la stratégie j celui qui a joué i remporte une proportion m_{ij} du butin. On note qu'on a donc $m_{ij} + m_{ji} = 1$ et $m_{ii} = 1/2$.

Un joueur a pour politique de jouer 1 avec probabilité p, 2 avec probabilité q et 3 avec probabilité r. On supposera que $p, q, r > 0$. On dit alors que ce joueur joue une stratégie (p, q, r).

1. Calculer les gains esperés par son adversaire si ce adversaire joue 1 (resp. 2, resp. 3.) Nous notons ces gains $\mathrm{N}(1), \mathrm{N}(2), \mathrm{N}(3)$.

2. Montrer qu'il n'existe pas de stratégie (p', q', r') permettant un gain esperé de $> 50\%$ face à une stratégie (p, q, r) si et seulement si $\mathrm{N}(1) = \mathrm{N}(2) = \mathrm{N}(3) = 1/2$. On dit alors que la stratégie (p, q, r) est stable.
3. Ecrire les équations qui traduisent la stablité de la stratégie (p, q, r) et les résoudre dans les cas suivants :
   (a) $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ (jeu du papier-pierre-ciseaux)
   (b) $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 2/3 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

■

Correction de l'exercice **1.**

1. $AB = 0$, $BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
2. AB n'existe pas, $BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $AB = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -9 & 6 \end{pmatrix}$, BA n'existe pas

Correction de l'exercice **2.**

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice **3.**

1. $u_1 = (2, -1, -2)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (-2, 1, 3)$ indép.
2. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice **4.**

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. $e'_1 = (3, 1)$ et $e'_2 = (5, 2)$ non proportionnels.
3. $f(e'_1) = (6, -1) = 17e'_1 - 9e'_2$, $f(e'_2) = (10, -2) = 30e'_1 - 16e'_2$ d'où $A' = \begin{pmatrix} 17 & 30 \\ -9 & -16 \end{pmatrix}$.
4. $P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
5. $A' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 30 \\ -9 & -16 \end{pmatrix}$.
6. f^5 a pour matrice $A^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base B et $A'^5 = \begin{pmatrix} 197 & 330 \\ -99 & -166 \end{pmatrix}$ dans la base B'.

Correction de l'exercice **5.**

1. $\ker f = \text{Vect}((1,-3,2))$ d'où $\dim(\text{Im} f) = 2$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (u_1, u_2, u_3)$.
   (a) on a $u_1 - 3u_2 = -2u_3$. (u_1, u_2) forme une base de $\text{Im} f$ car u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels.
   (b) calcul. remarque : les vecteurs lignes aussi sont liés.
3. On résoud l'équation ou bien on voit que $(1,-2,-1) \notin \text{Im} f$ car $(1,-2,-1)$ est orthogonal à u_1 et à u_2.
4. On a $f(X) = (1,2,-3) = f(e_1)$ ssi $X \in e_1 + \ker f$. Pour le cas général, si $Y \in \text{Im} f$, soit $X_0 \in \mathbf{R}^3$ tel que $f(X_0) = Y$ alors l'ensemble des solutions est $X_0 + \ker f$.

Correction de l'exercice **6.**

1. solution $(x,y,z) = (-1,0,1)$.
2. Noter que $l_2 = 3l_1$. On obtient $\begin{cases} x = -3 - 2z \\ y = 4 + z \end{cases}$. Posons $s = (-3,4,0)$ et $u_= (-2,1,1)$. La solution est s+Vect(u).

Le déterminant du premier système est -1 et celui du second est 0. L'unicité de la solution du premier système implique que le déterminant est non nul, et la non unicité pour le second implique que le déterminant est nul.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER 2012-2013
Licence de mathématiques

MAT 234

Corrigé des exercices 11, 13 et 14 de la feuille de TD 1 d'algèbre

Exercice 11

1. On cherche $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ tels que la réaction $x\,NaCl + y\,BeF_2 \longrightarrow z\,NaF + t\,BeCl_2$ soit équilibrée.
Pour cela il faut autant d'atomes de Na, Cl, Be et F avant et après la réaction. Cela donne :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & z \\ x & = & 2t \\ 2y & = & z \\ y & = & t \end{array}\right.$$

En prenant par exemple y comme variable secondaire, on voit que l'ensemble des (x, y, z, t) solutions est l'ensemble $\{(2y, y, 2y, y),\ y \in \mathbb{R}\}$. C'est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^4$ engendrée par le vecteur $(2, 1, 2, 1)$. En prenant $y = 1$, cela donne la réaction équilibrée :

$$2\,NaCl + BeF_2 \longrightarrow 2\,NaF + BeCl_2.$$

(On peut également l'équilibrer en prenant n'importe quel multiple entier de cette solution, et il n'y a aucune autre façon de l'équilibrer).

2. En notant $x\,Fe + y\,Cl_2 \longrightarrow z\,FeCl_3$, la réaction est équilibrée si :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & z \\ 2y & = & 3z \end{array}\right.$$

En prenant z comme variable secondaire et x, y comme variables principales, cela donne que l'ensemble des (x, y, z) solutions est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1, \frac{3}{2}, 1)$.
En prenant $z = 2$, cela donne la réaction équilibrée :

$$2\,Fe + 3\,Cl_2 \longrightarrow 2\,FeCl_3.$$

3. En notant $a\,KMnO_4 + b\,HCl \longrightarrow c\,KCl + d\,MnCl_2 + e\,H_2O + f\,Cl_2$, la réaction est équilibrée si :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & c \\ a & = & d \\ 4a & = & e \\ b & = & 2e \\ b & = & c + 2d + 2f \end{array}\right.$$

En prenant a comme variable secondaire, on obtient que l'ensemble des solutions est la droite vectorielle d'équation

$$\left\{\begin{array}{lcl} b & = & 8a \\ c & = & a \\ d & = & a \\ e & = & 4a \\ f & = & \frac{5}{2}a \end{array}\right.$$

La droite vectorielle solution est engendrée par le vecteur à coefficient entier $(2, 16, 2, 2, 8, 5)$, ce qui donne la réaction équilibrée :

$$2\,KMnO_4 + 16\,HCl \longrightarrow 2\,KCl + 2\,MnCl_2 + 8\,H_2O + 5Cl_2$$

4. $K_4Fe(CN)_6 + 6\,H_2SO_4 + 6\,H_2O \longrightarrow 2\,K_2SO_4 + FeSO_4 + 3\,(NH_4)_2SO_4 + 6\,CO.$

5. $2\,C_6H_5COOH + 15\,O_2 \longrightarrow 14\,CO_2 + 6\,H_20.$

6. En utilisant $a = 2e$, $g = h = 6a = 12e$ et $f = b$, on se ramène au bilan suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccll} b & & -d & +8e & = 0 & (K) \\ -b & +c & -d & -3e & = 0 & (O) \\ & 2c & -d & -12e & = 2i & (H) \\ & 4c & -4d & -72e & = i & (S) \end{array}\right.$$

Après pivots de Gauss, cela donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccl} b & & -d & +8e & = 0 \\ & +c & -2d & +5e & = 0 \\ & & 3d & -22e & = 2i \\ & & & 188e & = 5i \end{array}\right.$$

Les réactions équilibrées sont les multiples de la réaction :

$10\,K_4Fe(CN)_6 + 122\,KMnO_4 + 299\,H_2SO_4 \longrightarrow$
$162KHSO_4 + 5\,Fe(SO_4)_3 + 122\,MnSO_4 + 60\,HNO_3 + 60\,CO_2 + 188\,H_2O.$

7. $2\,PhCH_3 + 6\,KMnO_4 + 6\,H_2SO_4 \longrightarrow 2\,PhCOOH + 3\,K_2SO_4 + 6\,MnSO_4 + 8\,H_2O.$

Exercice 13

1. Cela résulte de la définition du produit matriciel.

2. On a $M_j.M_k = \sum_{l=1}^{m} e^{\frac{2(j-1)(l-1)\pi i}{m}} e^{\frac{2(k-1)(l-1)\pi i}{m}} = \sum_{l=1}^{m} e^{\frac{2(j+k-2)(l-1)\pi i}{m}} = \sum_{l=0}^{m-1} e^{\frac{2(j+k-2)l\pi i}{m}} = \sum_{l=0}^{m-1} (e^{\frac{2(j+k-2)\pi i}{m}})^l$.
$M_j.M_k$ est la somme d'une suite géométrique finie de raison $e^{\frac{(j+k-2)}{m}2\pi i}$. On a $e^{\frac{(j+k-2)}{m}2\pi i} = 1$ si et seulement si $\frac{j+k-2}{m}$ est entier. Dans ce cas, $M_j.M_k$ vaut $\sum_{l=0}^{m-1} 1 = m$. Sinon, $M_j.M_k = \frac{e^{(j+k-2)2\pi i} - 1}{e^{\frac{2(j+k-2)\pi i}{m}} - 1} = 0$.

3. La première question résulte de la définition du produit matriciel. Si ${}^tNM = \mathrm{Id}$, alors on sait que M est inversible et que $M^{-1} = {}^tN$. La question précédente peut s'écrire ${}^tMM = m\mathrm{Id}$. Cela donne $M^{-1} = \frac{1}{m}\,{}^tM$.

4. En multipliant par M^{-1} à gauche, l'équation de la question **1.** devient $\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_{m-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{m}\,{}^tM \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \dots \\ f(m-1) \end{pmatrix}$.

En développant le calcul matriciel, cela donne $\lambda_j = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} e^{\frac{2(j-1)(k-1)\pi i}{m}} f(k)$ pour tout $j = 0, ..., m-1$.
Remarque : cette transformation (bijective) mettant en relation les coefficients λ_i et les données $f(k)$ s'appelle la transformée de Fourier discrète.

Exercice 14

1. En jouant i, l'adversaire a p chance de gagner $m_{i,1}$, q chance de gagner $m_{i,2}$ et r chance de gagner $m_{i,3}$. Cela donne $N(i) = p.m_{i,1} + q.m_{i,2} + r.m_{i,3}$.
En notant M la matrice 3x3 dont les coefficients sont les $m_{i,j}$, N la matrice colonne dont les coefficients sont les $N(i)$ et J la matrice colonne $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, cela s'écrit $N = M.J$.

Feuille d'exercices n° 2

1 Exercices.

Exercice 1. Dans cet exercice, toutes les matrices sont carrées.

1. Soit M' la matrice obtenue à partir de la matrice M par l'opération $L_1 \to 2L_1 + L_2$. Est-ce qu'alors $\det(M) = \det(M')$?
2. Montrer que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ est un entier pair. Est-il multiple de 4 ?
3. Montrer sans calcul que $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
4. En dimension 3, a-t-on $\det_{\mathscr{B}}(v_1, v_2, v_3) = \det_{\mathscr{B}}(v_2, v_3, v_1)$? En dimension 4, a-t-on $\det_{\mathscr{B}}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \det_{\mathscr{B}}(v_2, v_3, v_4, v_1)$?
5. Soit v un vecteur d'un espace vectoriel E de dimension n. Si $\det(v_1 + v, v_2, ..., v_n) = \det(v_1, ..., v_n)$, a-t-on alors $v \in vect(v_2, .., v_n)$?
6. Supposons que M et M' sont deux matrices carrées telles qu'il existe $X \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = M'X$. Peut-on en déduire que $\det(M) = \det(M')$?
7. S'il existe $X \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = M'X = 0$, peut-on en déduire que $\det(M) = \det(M')$?
8. S'il existe $X \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = M'X$, peut-on en déduire que $\det(M - M') = 0$?

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ 1 & \cos y & \cos 2y \\ 1 & \cos z & \cos 2z \end{vmatrix} \quad , \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

(Indication : pour le déterminant A, on pourra développer $\cos 2x$ *et faire des opérations sur les colonnes.)*

2 Faire ses gammes.

Exercice 3. Calculer les déterminants des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Applications et exercices plus sophistiquées.

Exercice 4. On rappele l'équation, vue en Mat112,

$$\det(u, v, w) = (u \wedge v).w$$

1. Soient u, v des vecteurs de ^{3} et soit θ l'angle entre les deux.

   Utilisant l'équation
   $$u.v = ||u||||v|| \cos\theta$$
   montrer que
   $$||u||||v||| \sin\theta| = ||u \wedge v||.$$
2. Donner une interpretation géométrique da la quantité $||u||||v||| \sin\theta|$.
3. Montrer que $u \wedge v$ est perpendiculaire à u et v.
4. En déduire que $|\det(u, v, w)| = \mathrm{vol(P)}$ ou P est le parallelopiped engendré par u, v et w.
5. Sous quelles conditions ce parallelopiped est-il de volume 0 ? Commenter votre résultat.

Exercice 5. Un graphiste a besoin de construire une courbe lisse qui passe par un certaine nombre de points donnés (b_0, c_0), (b_1, c_1), (b_n, c_n). Une façon (assez basique) de faire cela est de construire un polynôme dont le graphe passe par ces points.

Nous supposons donc donnés les points (b_i, c_i) et nous cherchons un polynôme $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ qui a le propriété que $P(b_0) = c_0, \ldots P(b_m) = c_m$.

1. Montrer que cela équivaut à
   $$M(b_0, \ldots b_m) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$
   ou $M(b_0, b_1, \ldots, b_m)$ est la matrice donnée par $M(b_0, b_1, \ldots, b_m) = \begin{pmatrix} 1 & b_0 & b_0^2 & \ldots & b_0^n \\ 1 & b_1 & b_1^2 & \ldots & b_1^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & b_m & b_m^2 & \ldots & b_m^n \end{pmatrix}$.
2. Justifier que si cette équation a une solution pour chaque choix des c_i alors $n \geq m$.
3. Justifier que si $n = m$ alors cette équation a une solution pour chaque choix des c_is si et seulement si la matrice
   $$M(b_0 \ldots b_m) = \begin{pmatrix} 1 & b_0 & b_0^2 & \ldots & b_0^n \\ 1 & b_1 & b_1^2 & \ldots & b_1^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & b_m & b_m^2 & \ldots & b_m^n \end{pmatrix}$$
   a determinant $\neq 0$.

Il est donc important de calculer le determinant de la matrice M. C'est le but de la deuxième moitié de cet exercice.

1. Calculer $\det(M(b_0, b_1))$ pour $n = 1$, $M = \begin{pmatrix} 1 & b_0 \\ 1 & b_1 \end{pmatrix}$ une matrice 2×2.
2. Nous considérons le cas ou $n = 2$. En faisant les opérations de colonnes $C3- > C3 - b_0 C2$ puis $C2- > C2 - b_0 C1$, montrer que
   $$\det(M(b_0, b_1 b_2)) = (b_1 - b_0)(b_2 - b_0)\det(M(b_1, b_2)).$$
   En déduire $\det(M(b_0, b_1, b_2))$.
3. En général, on considère $M(b_0, \ldots, b_m)$. En faisant les opérations de colonnes $C_{m+1}- > C_{m+1} - b_0 C_m$, puis $C_m- > C_m - b_0 C_{m-1}$ et ainsi de suite, montrer que
   $$\det(M(b_0, b_1, \ldots, b_m)) = \Pi_{k=1}^{n}(b_k - b_0) \times \det(M(b_1, \ldots b_n)).$$
4. En déduire que $\det(M(b_0, \ldots, b_m)) = \Pi_{0 \leq j < k \leq m-1}(b_k - b_j)$. Quand a-t-on $\det(M(b_0, \ldots, b_m)) = 0$?

Correction de l'exercice **1.**

1. Non. $\det(M') = 2\det(M)$.
2. Non. Considérer $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = e_1$.
3. Oui car $\ker(M - M')$ est non trivial.
4. Oui en permutant deux fois.
5. On a $0 = \det(v_1 + v, v_2, \dots, v_n) - \det(v_1, \dots, v_n) = \det(v, v_2, \dots, v_n)$. En dimension 2 cela implique que $v \in vect(v_2)$. En dimension supérieure non car $(v_2, \dots, v_n)$ peut être liée.

Correction de l'exercice **2.**

1. $\Delta = -140$
2. $\Delta = 2(\cos y - \cos x)(\cos z - \cos x)(\cos z - \cos y)$
3. Par exemple, commencer à trigonaliser pour obtenir la forme factrorisée :

$$\Delta = -(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

.

Correction de l'exercice **3.**

$\det(A) = -6$, $\det(B) = 4$, $\det(C) = 4$, $\det(D) = 2$.

Université Joseph Fourier

Mat234 – Fiche 2 d'algèbre (quelques corrigés)

Corrigé exercice 4

• Commençons par répondre à la question 3. Le déterminant est nul si deux vecteurs sont égaux, de sorte qu'avec le rappel, on a :

$$\det(u,v,u) = (u \wedge v).u = 0 \quad \text{et} \quad \det(u,v,v) = (u \wedge v).v = 0\,,$$

ce qui donne le résultat.

• Pour la question 1, rappelons qu'étant donnés deux vecteurs non nuls a et b de $\mathbb{R}^2$ muni d'une base orthonormée directe (e_1, e_2) on a : $\det_{e_1,e_2}(a,b) = |a|\ |b|\ \sin(a,b)$. En effet, dans la base (e_1,e_2), on peut écrire : $\hat{a} = a/|a| = (\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ et $\hat{b} = b/|b| = (\cos\beta, \sin\beta)^T$, et donc $\det_{e_1,e_2}(\hat{a},\hat{b}) = \sin(\beta - \alpha)$, d'où l'on déduit le résultat.

Considérons maintenant dans $\mathbb{R}^3$ une base orthonormée de sens direct (e_1,e_2,e_3) telle que $\text{Vect}(e_1,e_2) = \text{Vect}(u,v)$ de sorte que $u \wedge v$ est colinéaire à e_3. Ainsi, $\det_{e_1,e_2,e_3}(u,v,e_3) = \det_{e_1,e_2}(u,v) = |u|\ |v|\ \sin(u,v) = (u \wedge v).e_3 = |u \wedge v|\ |e_3|\ \cos(u \wedge v, e_3) = \pm|u \wedge v|$. La première égalité étant obtenue en développant le déterminant par rapport à la dernière ligne ou colonne.

• Question 2 : la quantité $|u|\ |v|\ |\sin(u,v)|$ représente l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs u et v.

• Pour la question 4, on écrit $\det(u,v,w) = (u \wedge v).u = |u \wedge v|\ |w|\ \cos(u \wedge v, w)$, ce qui donne le résultat car la quantité $|w|\ \cos(u \wedge v, w)$ représente la mesure signée du projeté orthogonal du vecteur w sur le vecteur unitaire $(u \wedge v)/|u \wedge v|$, lui même orthogonal au plan $\text{Vect}(u,v)$.

• La question 5 est claire.

Corrigé exercice 5

1. Déterminer un polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, de degré n, tel que $P(b_i) = c_i$ pour $i = 0,1,...,m$, est équivalent à déterminer $n+1$ coefficients réels $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que $a_0 + a_1b_i + a_2b_i^2 + \cdots + a_nb_i^n = c_i$, pour $i = 0,1,...,m$, c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 + a_1b_0 + a_2b_0^2 + \cdots + a_nb_0^n & = & c_0 \\ a_0 + a_1b_1 + a_2b_1^2 + \cdots + a_nb_1^n & = & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 + a_1b_m + a_2b_m^2 + \cdots + a_nb_m^n & = & c_m \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 1 & b_0 & b_0^2 & \cdots & b_0^n \\ 1 & b_1 & b_1^2 & \cdots & b_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b_m & b_m^2 & \cdots & b_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

2. La matrice M ci-dessus définit une application linéaire (notée également M) de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$: $a = (a_0,...,a_n)^T \mapsto M\,.\,a = (c_0,...,c_m)^T = c$. L'hypothèse nous dit que l'application M est surjective, de sorte que le résultat est une conséquence immédiate du théorème du rang : $\dim(\ker M) + \Big(\dim(\text{Im} M) = m+1\Big) = n+1$.

3. Pour $n = m$, l'application linéaire M est surjective (et donc bijective) si et seulement si $\dim(\ker M) = 0$ ($\Leftrightarrow M$ injective), c'est-à-dire si et seulement si $\det(M) \neq 0$.

Pour la deuxième partie, considérons directement le cas général. Les opérations de colonnes $C_k \leftarrow C_k - b_0C_{k-1}$ pour $k = n+1, ..., 2$ donnent successivement : $\det(M(b_0,b_1,...,b_n)) =$

$$\begin{vmatrix} 1 & b_0 & b_0^2 & \cdots & b_0^{n-1} & b_0^n \\ 1 & b_1 & b_1^2 & \cdots & b_1^{n-1} & b_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b_n & b_n^2 & \cdots & b_n^{n-1} & b_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & b_1 - b_0 & b_1^2 - b_0b_1 & \cdots & b_1^{n-1} - b_0b_1^{n-2} & b_1^n - b_0b_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b_n - b_0 & b_n^2 - b_0b_n & \cdots & b_n^{n-1} - b_0b_n^{n-2} & b_n^n - b_0b_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & b_1 - b_0 & b_1(b_1 - b_0) & \cdots & b_1^{n-2}(b_1 - b_0) & b_1^{n-1}(b_1 - b_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b_n - b_0 & b_n(b_n - b_0) & \cdots & b_n^{n-2}(b_n - b_0) & b_n^{n-1}(b_n - b_0) \end{vmatrix}$$

$$= \Pi_{k=1}^{n}(b_k - b_0) \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_1^2 & \cdots & b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ 1 & b_2 & b_2^2 & \cdots & b_2^{n-2} & b_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b_n & b_n^2 & \cdots & b_n^{n-2} & b_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \Pi_{k=1}^{n}(b_k - b_0) \,.\, \det(M(b_1, ..., b_n))$$

d'où l'on déduit par une récurrence immédiate que

$$\det(M(b_0, .., b_n)) = \Pi_{0 \leq j < k \leq n} \, (b_k - b_j) \,.$$

La discussion est ensuite élémentaire. Notons que le bon sens incite à choisir les b_i deux à deux distincts. En effet, si $b_k = b_l$ pour $k \neq l$, les conditions $P(b_k) = c_k$ et $P(b_l) = c_l$ conduisent à une impossibilité si $c_k \neq c_l$ et à une redondance si $c_k = c_l$.

Feuille d'exercices n° 3

1 Exercices.

Exercice 1. Trouver les éléments propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lesquelles sont diagonalisables ?

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable et trouver une matrice P qui diagonalise A. En déduire A^n pour $n \geq 1$.

On considére les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par les valeurs initiales $u_0 = v_0 = 1$, $w_0 = 2$ et les relations suivantes :

$$u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \qquad v_{n+1} = 2v_n \qquad w_{n+1} = u_n - v_n + 3w_n.$$

Déterminer u_n, v_n et w_n.

Exercice 3. Déterminer les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère le système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = x(t) + 4z(t), \qquad \dot{y}(t) = y(t) + 4w(t),$$

$$\dot{z}(t) = x(t) + z(t), \qquad \dot{w}(t) = y(t) + w(t).$$

Trouver la solution générale de ce système, puis la solution particulière qui vérifie les conditions initiales $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $w(0) = 2$

Exercice 4. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}$.

1. A et B sont-elles diagonalisables ?
2. Quel est le rang de A ?
3. À l'aide des sommes sur les lignes de A, trouver sans calcul une vecteur propre de A.
4. Déterminer les éléments propres de A.
5. Déterminer sans calcul une valeur propre de B.
6. Pour tout $n \geq 1$, déterminer B^n.

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a+b & \sqrt{2}b \\ \sqrt{2}b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a+b & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a+b \end{pmatrix}$.

1. A et B sont-elles diagonalisables ?
2. Déterminer une base de $\mathbf{R}^2$ formée de vecteurs propres de A. Que remarque-t-on ? Trouver une base orthonormée de vecteurs propres.
3. Déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de B.
4. En déduire une base de vecteurs propres pour la matrice

$$\begin{pmatrix} a+b & \sqrt{2}b & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+b & b & 0 \\ 0 & 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & b & a+b \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit $a \in \mathbf{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calculer la polynôme caractéristique de A et trouver ses valeurs propres.
- Déterminer les sous-espaces propres de A. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?

A partir d'ici on supposera que $a = 0$.

- On considère le système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = x(t) + y(t) - z(t), \qquad \dot{y}(t) = y(t),$$

$$\dot{z}(t) = -y(t) + 2z(t), \qquad \dot{w}(t) = x(t) + z(t) + 2w(t).$$

Trouver la solution générale de ce système, puis la solution particulière qui vérifie les conditions initiales $x(0) = y(0) = w(0) = 0, z(0) = 1$.

Exercice 7. Soit $x(t)$ une variable qui satisfait l'équation

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0.$$

1. Soit $v(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{n-1}(t) \end{pmatrix}$. Montrer que

$$v'(t) = \mathrm{M}v(t)$$

   ou M est la matrice

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. Calculer le polynôme caractéristique de M. Commenter votre résultat.

2 Faire ses gammes.

Exercice 8. Diagonaliser les matrices suivantes

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque matrice M_i :

1. Calculer M_i^n pour tout n
2. Résoudre la récurrence $v_n = M_i v_{n-1}$ en termes du vecteur initiale $v_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$
3. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
4. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = M_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

■

3 Applications et exercices plus sophistiquées.

Exercice 9. Un proteine existe en deux formes, A et B.

Dans une intervalle d'une heure, un molécule en forme A passe en forme B avec une probabilité p, ou $0 < p < 1$.

De même, dans une intervalle d'une heure, une molécule en forme B passe en forme A avec une probabilité q, ou $0 < q < 1$.

En temps $t = 0$ un échantillon de proteine contient une proportion a_0 de molécules en forme A et une proportion b_0 de molécules en forme B. Soit a_n (resp. b_n) la probabilité qu'une molécule prelevé dans l'echantillon n heures plus tard soit en forme A (resp. B).

1. Etablir la rélation
$$a_n = (1-p)a_{n-1} + qb_{n-1}.$$
$$b_n = pa_{n-1} + (1-q)b_{n-1}.$$
2. Re-écrire cette rélation dans la forme
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$
pour une certaine matrice M. En déduire que
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$
pour tout entier n.
3. Diagonaliser M et en déduire M^n pour tout n.
4. Donner a_n, b_n en termes de p, q, a_0, b_0 et n. Commenter le comportement de a_n, b_n quand $n \to \infty$.

■

Exercice 10. On dit qu'un matrice $n \times n$ M est une matrice de probabilité de transition régulière si

1. pour tout $i \in [1 \dots n]$ on a que $m_{i1} + m_{i2} + \dots m_{in} = 1$. En d'autres termes, la somme des éléments dans un colonne de la matrice fait toujours 1.
2. pour tout $i, j \in [1 \dots n]$ on a que $m_{ij} > 0$.

De telles matrices sont utilisées dans les sciences physiques pour modeliser des systèmes aléatoires ayant n états, m_{ij} étant la probabilité que le système passe de l'état i vers l'état j en un certain laps de temps. Le comportement asymptotique du système dépende alors du comportement de M^n quand $n \to \infty$.

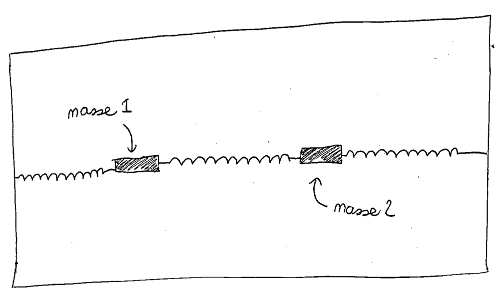
Nous considérons le cas ou $n = 2$, c-a-d $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$ avec $0 < a, b < 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de M.
2. Montrer que λ, l'autre valeur propre de M, satisfait $|\lambda| < 1$.
3. En diagonalisant M, déduire $\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}^n$.

Nous allons maintenant regarder le cas $n = 3$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de M. (Indice : on pourra utiliser des opérations sur les lignes de la matrice $\mathrm{M} - \mathrm{Id}$).
2. Montrer que toute valeur propre λ de ${}^t\mathrm{M}$ satisfait $|\lambda| \leq 1$. (Indice : dans léquation vectorielle ${}^t\mathrm{M}v = \lambda v$ on pourra considérer le coefficient de plus grand valeur absolue.)
3. Montrer que toute valeur propre λ de M satisfait $|\lambda| \leq 1$.
4. Montrer que si M est diagonalisable et n'admet pas -1 comme valeur propre alors $\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}^n$ existe. Commenter ce résultat.

Exercice 11. Deux masses égales sont suspendues entre trois ressorts identiques de coefficient de rigidité k sur une table plane et lisse, comme dans le diagramme ci-dessous.



Les deux masses sont mises en mouvement en temps $t = 0$. Soit $x_1(t)$ (resp. $x_2(t)$) l'écart de la première (resp. de la seconde) masse de sa position d'équilibre en temps t. On admettra que les lois de Newton nous donnent que

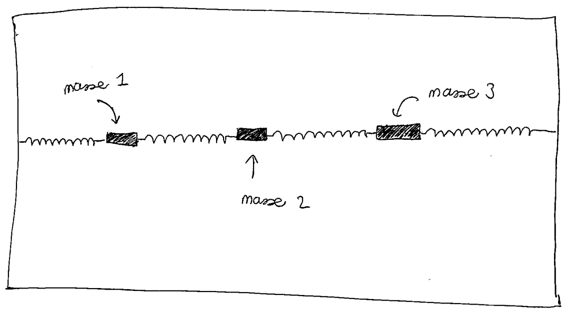
$$mx_1'' = -2kx_1 + kx_2$$

$$mx_2'' = kx_1 - 2kx_2.$$

1. Reécrire cette équation dans la forme
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}'' = \mathrm{M}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
pour une certaine matrix M.
2. Diagonaliser M et donner la solution générale de cette équation.
3. Interprêter physiquement les deux modes “fondamentales”, cad, les solutions particulières correspondantes à chaque valeur propre.

4. Justifier les équations de mouvement données ci-dessus.

Nous considérons maintenant la même situation avec 3 masses suspendues entre 4 ressorts, comme ci-dessous.



Nous admettrons les équations de mouvement,

$$mx_1'' = -2kx_1 + kx_2$$
$$mx_2'' = kx_1 - 2kx_2 + kx_3$$
$$mx_3'' = kx_2 - 2kx_3.$$

1. Re-écrire ces équations dans la forme
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}'' = \mathrm{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
pour une certaine matrix M.
2. Diagonaliser M et donner la solution générale de cette équation.
3. Interpréter physiquement la mode “fondamentale” correspondante à la valeur propre $2k/m$.
4. Justifier les équations de mouvement données ci-dessus.

■

Exercice 12. On cherche à déterminer les matrices X qui commutent avec la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que les matrices X qui commutent avec A forment un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
- Trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$.
- Déterminer les matrices Y qui commutent avec D et en déduire celles qui commutent avec A.

■

Exercice 13. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathrm{A}^p = 0$. Montrer que 0 est l'unique valeur propre de A. La réciproque est-elle vraie ?

■

MAT234 Corrigé exercice 3 Feuille TD Algèbre 3

1. Facile, on applique la formule des probabilités totales, ou on fait un arbre.
2. $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$, puis $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}^n . \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$ par récurrence facile ou analogie avec une suite géométrique.

3. Posons $M = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}$.
   Alors $C_M = (1-p-X).(1-q-X) - pq = X^2 + (p+q-2).X + 1 - p - q$
   1 est racine évidente de C_M , l'autre est $1-p-q$.
   Ainsi M a deux valeurs propres distinctes, et elle est diagonalisable.
   Pour la suite, on pose $d = 1-p-q$

   <u>Recherche du sep associé à 1</u> : $M \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow px - qy = 0$
   donc $\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$ est vecteur propre de M pour 1.

   <u>Recherche du sep associé à d</u> : $M \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = d . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow qy = -qx$
   donc $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ est vecteur propre de M pour d

   <u>Matrice de passage</u> : $P = \begin{bmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{bmatrix}$

   <u>Inverse de P :</u> $\begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ **<u>ssi</u>** $\begin{cases} \mathrm{x} = \dfrac{1}{\mathrm{p+q}} . (\mathrm{X+Y}) \\ \mathrm{Y} = \dfrac{1}{\mathrm{p+q}} . (\mathrm{pX - qY}) \end{cases}$
   donc $P^{-1} = \dfrac{1}{p+q} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p & -q \end{bmatrix}$

   <u>Diagonalisation de M</u> : $P^{-1} M P = D$, avec $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

   <u>Puissances de M</u> : $M = PDP^{-1}$, donc $M^n = P . D^n . P^{-1}$

   On en déduit que $M^n = \dfrac{1}{p+q} . \begin{bmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d^n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p & -q \end{bmatrix} = \dfrac{1}{p+q} . \begin{bmatrix} q + pd^n & q - qd^n \\ p - pd^n & p + qd^n \end{bmatrix}$

4. On en déduit que $\begin{cases} \mathrm{a_n} = \dfrac{1}{\mathrm{p+q}} . ((\mathrm{q + pd^n}) \mathrm{a_0} + (\mathrm{q - qd^n}) \mathrm{b_0}) \\ \mathrm{b_n} = \dfrac{1}{\mathrm{p+q}} . ((\mathrm{p - pd^n}) \mathrm{a_0} + (\mathrm{p + qd^n}) \mathrm{b_0}) \end{cases}$

   Comme p+q $\in$]0;2[, on a d $\in$]-1;1[, et donc $d^n \to 0$ qd $n \to +\infty$
   Donc $a_n \to \dfrac{qa_0 + qb_0}{p+q}$ et $b_n \to \dfrac{pa_0 + pb_0}{p+q}$

Correction exercice 10 fiche 3 d'algèbre

Cas $n = 2$

1. Pour montrer que 1 est valeur propre de la matrice M on peut procéder de trois façons. Première méthode : on résout le système $Mv = v$. Si le système a une solution alors 1 est valeur propre.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = x \\ (1-a)x + (1-b)y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} by = (1-a)x \\ by = (1-a)x \end{cases}$$

Seconde méthode : on calcule le déterminant ou le rang de la matrice $M - Id$, où Id désigne la matrice identité. Grâce au théorème du rang on trouve la dimension de $\ker(M - Id)$, si elle est non nulle alors 1 est valeur propre.

$$M - Id = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ 1-a & -b \end{pmatrix}$$

On constate que la première ligne est proportionnelle à la seconde avec un facteur -1. Autrement dit, le rang de la matrice $M - Id$ est égal à 1, ou encore le déterminant de $M - Id$ est nul. Finalement, $\dim\ker(M - Id) = 1$, donc 1 est valeur propre de M.
Troisième méthode : on calcule le polynôme caractéristique et on trouve les valeurs propres.

$$\begin{aligned} P_M(X) &= \begin{vmatrix} X-a & -b \\ a-1 & X-1+b \end{vmatrix} \\ &= (X-a)(X-1+b) + b(a-1) \\ &= X^2 + (b-a-1)X + a - b \end{aligned}$$

Dans le cas $n = 2$, on a $P_M(X) = X^2 - tr(M)X + \det(M)$. Par ailleurs, $\det(M) = \lambda_1\lambda_2$ et $tr(M) = \lambda_1 + \lambda_2$. En revenant au cas d'étude on trouve immédiatement $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = a - b$.

2. L'inégalité $|\lambda_2| < 1$ se déduit facilement des inégalités sur a et b.

3. Rappel : $M^n = PD^nP^{-1}$, où D est la matrice diagonale composée des valeurs propres de M, et P est la matrice de passage de la base canonique vers la base composée de vecteurs propres de M. Il faut donc trouver une matrice de passage P et son inverse P^{-1}. Pour avoir une matrice de passage on choisit des vecteurs propres :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-a}{b} \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice P est donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-a}{b} & -1 \end{pmatrix}$$

Par la formule de Cramer, on trouve P^{-1} :

$$P^{-1} = \frac{b}{a-b-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{a-1}{b} & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule $\lim_{n\to+\infty} M^n$:

$$\lim_{n\to+\infty} M^n = \frac{b}{a-b-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-a}{b} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{a-1}{b} & 1 \end{pmatrix} = \frac{b}{a-b-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{a-1}{b} & \frac{a-1}{b} \end{pmatrix}$$

Cas $n = 3$

1. La matrice M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 1-a-b & 1-c-d & 1-e-f \end{pmatrix}$$

Pour montrer que 1 est valeur propre on calcule le rang de $M - Id$.

$$M - Id = \begin{pmatrix} a-1 & c & e \\ b & d-1 & f \\ 1-a-b & 1-c-d & -e-f \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} rg(M-Id) &= rg \begin{pmatrix} a-1 & c & e \\ b & d-1 & f \\ -b & 1-d & -f \end{pmatrix} \quad \% \ l_3 + l_1 \\ &= rg \begin{pmatrix} a-1 & c & e \\ b & d-1 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \% \ l_3 + l_2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi, $\dim \ker(M - Id) = 1$ et donc 1 est valeur propre de M.

2. Soit λ une valeur propre de ${}^tM$, c'est-à-dire il existe $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que ${}^tMv = \lambda v$. Puisque $v \neq 0$, il existe un indice $j \in \{1,2,3\}$ tel que $v_j \neq 0$ et $|v_j| > |v_i|$, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$. La $j$ème ligne du système linéaire est la suivante :

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \lambda v_j$$

avec $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \\ 1-c-d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \\ 1-e-f \end{pmatrix} \right\}$.
Par inégalité triangulaire on obtient

$$\left| \frac{\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3}{v_j} \right| = |\lambda| \leq \left| \frac{\alpha v_1}{v_j} \right| + \left| \frac{\beta v_2}{v_j} \right| + \left| \frac{\gamma v_2}{v_j} \right| \leq \alpha + \beta + \gamma = 1$$

Pour la dernière inégalité on utilise le fait que $|v_j| > |v_i|$, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$. L'égalité finale provient de la définition de la matrice M.

3. Puisque toute valeur propre λ de ${}^tM$ satisfait $|\lambda| \leq 1$, il en est de même pour M car elles ont les mêmes valeurs propres. Pour voir cela on peut passer par le calcul du polynôme caractéristique :

$$\det\left({}^tM - XId\right) = \det\left({}^t(M - XId)\right) = \det(M - XId)$$

${}^tM$ et M ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres.

4. Si M est diagonalisable, il existe une matrice diagonale D composée des valeurs propres de M telle que
$$P^{-1}MP = D$$
où P est la matrice de passage de la base canonique vers la base composée de vecteurs propres. On a donc
$$M^n = PD^nP^{-1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} M^n = P\left(\lim_{n\to+\infty} D^n\right)P^{-1}$$
Avec ce qui précéde et comme -1 n'est pas valeur propre on a
$$\lim_{n\to+\infty} D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$
où $\alpha \in \{0,1\}$ et $\beta \in \{0,1\}$, cela dépend des valeurs propres. Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} D^n$ existe et donc $\lim_{n\to+\infty} M^n$ existe. Le fait que $\lim_{n\to+\infty} M^n$ existe signifie qu'en temps long la probabilité de passer d'un état vers l'autre ne varie plus.

Université Joseph Fourier Grenoble 1
MAT 234 2012/2013

Correction exercice 12 et 13 fiche 3 d'algèbre

Exercice 12

1. Soit $\Delta \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A. Soient X_1 et X_2 deux matrices de Δ, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour vérifier que Δ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ il suffit de vérifier que $\lambda X_1 + X_2$ est également dans Δ.

$$(\lambda X_1 + X_2)A = \lambda X_1 A + X_2 A = \lambda A X_1 + A X_1 = A(\lambda X_1 + X_2)$$

Donc $\lambda X_1 + X_2 \in \Delta$, et donc les matrices qui commutent avec A forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Pour trouver la matrice diagonale on cherche les valeurs propres de A, pour cela on calcule le polynôme caractéristique

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -4 \\ -3 & X+4 & -12 \\ -1 & 2 & X-5 \end{vmatrix} \\
&= (X-2)\begin{vmatrix} X+4 & -12 \\ 2 & X-5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -3 & X+4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (X-2)((X+4)(X-5)+24) - 4(-6+X+4) \\
&= (X-2)(X^2-X+4) - 4(X-2) \\
&= (X-2)(X^2-X) \\
&= X(X-2)(X-1)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc 0, 2 et 1. On cherche maintenant des vecteurs propres pour construire la matrice de passage P. Pour cela on résout trois systèmes.

Pour la valeur propre 0 :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & & +4z & = & 0 \\ 3x & -4y & +12z & = & 0 \\ x & -2y & +5z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcll} & 4y & -6z & = & 0 & \texttt{(l1-2xl3)} \\ & 2y & -3z & = & 0 & \texttt{(l2-3xl3)} \\ x & -2y & +5z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcll} & 2y & -3z & = & 0 & \\ x & & +2z & = & 0 & \texttt{(l3-l2)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = -\frac{3}{4}\alpha \\ z = -\frac{1}{2}\alpha \end{array}\right.$$

Le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre 0.

Pour la valeur propre 1 :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & & +4z & = & x \\ 3x & -4y & +12z & = & y \\ x & -2y & +5z & = & z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} x & & +4z & = & 0 \\ 3x & -5y & +12z & = & 0 \\ x & -2y & +4z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{4}\alpha \end{array}\right.$$

Le vecteur $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre 1.

Pour la valeur propre 2 :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & & +4z & = & 2x \\ 3x & -4y & +12z & = & 2y \\ x & -2y & +5z & = & 2z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} & & 4z & = & 0 \\ 3x & -6y & +12z & = & 0 \\ x & -2y & +3z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \frac{1}{2}\alpha \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Le vecteur $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre 2.

Aussi, pour la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteur propre on choisit

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On inverse la matrice P grâce à la formule de Cramer $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} {}^t com(P)$, on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice D est donc

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice qui commutent avec D.

$$Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$DY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$$

$$YD = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 2c \\ 0 & e & 2f \\ 0 & h & 2i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ e = \beta \\ f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \\ i = \gamma \end{cases}$$

Finalement, la matrice Y est de la forme

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Grâce à la relation $P^{-1}AP = D$ on obtient

$$YP^{-1}AP = P^{-1}APY \Leftrightarrow PYP^{-1}A = APYP^{-1}$$

Les matrices qui commutent avec A sont donnés par PYP^{-1}

$$\begin{aligned} PYP^{-1} &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\alpha & 4\beta & 2\gamma \\ -3\alpha & 0 & \gamma \\ -2\alpha & -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\alpha - 4\beta + 3\gamma & -4\alpha + 8\beta - 4\gamma & 8\alpha - 20\beta + 12\gamma \\ -\frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{2}\gamma & 3\alpha - 2\gamma & -6\alpha + 6\gamma \\ -\alpha + \beta & 2\alpha - 2\beta & -4\alpha + 5\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 13

Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tels que $Av = \lambda v$, alors $A^p v = \lambda^p v$, or $A^p = 0$. Aussi, si A est une matrice nilpotente, 0 est son unique valeur propre.

Maintenant, supposons que 0 soit la seule valeur propre de A. En tant que matrice dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ son polynôme caractéristique est donc :

$$P_A(X) = X^n$$

On invoque le théorème de Cayley-Hamilton : $P_A(A) = A^n = 0$. Ainsi, la matrice A est nilpotente d'indice $p \leq n$. La réciproque est donc vraie.