Logique mathématique

Le calcul propositionnel ou CPO

I. MOUAKHER-ABDELMOULA

2014-2015

Objectifs

La logique joue un rôle fondamental en informatique dans la spécification, construction et vérification des programmes, comme langage de programmation, dans son lien étroit avec la calculabilité. Elle joue aussi un rôle clé en intelligence artificielle, dans les bases de données, en probabilités, etc. L'objectif du cours est de donner les bases pour son utilisation dans les différents domaines, en mettant l'accent sur sa mécanisation.

Plan

Calcul propositionnel

- Comment écrire les formules ?
  - Aspects syntaxiques
- Comment déterminer la valeur de vérité d'une formule ?
  - Aspects sémantiques
- Comment démontrer de nouveaux résultats ?
  - Aspects déductifs

Langage de la logique des propositions

Définition

Le langage $\mathcal{L}$ du CP0 est composé :

- des symboles propositionnels (nots usuellement en lettre minuscules p, q, r) parmi lesquels on distingue deux symboles particuliers V et F
- des connecteurs logiques :
  - $\neg$ (négation)
  - $\wedge$ (conjonction)
  - $\vee$ (disjonction)
  - $\Rightarrow$ (implication)
  - $\Leftrightarrow$(équivalence)
- des des symboles auxiliaires : "(", ")"

Formules bien formées (fbf)

Définition

Nous appellerons atomes ou variables propositionnelles ou propositions élémentaires des énoncés dont nous ne connaissons pas la structure interne, et qui gardent leur identité tout au long du calcul propositionnel qui nous occupe. L'ensemble des variables propositionnelles est noté $v(\mathcal{L})$.

Définition

Nous denoterons les formules (ou formules bien formées fbf) par des lettres majuscules de l'alphabet latin ou grecque $(A, B, ...ou\varphi, \psi)$.
L'ensemble des formules, note $F(\mathcal{L})$, est defini par :

- les atomes sont des formules $(v(\mathcal{L}) \subseteq F(\mathcal{L}))$;
- si φ et ψ sont des formules, alors $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ et $(\neg\varphi)$ sont des formules.

Utilisation des parenthèses

- Les parenthèses sont un moyen de lever l'ambiguïté.
- En absence de parentheses, les connecteurs sont classés de la facon suivante (par priorite decroissante des connecteurs) : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

Exemple

$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg r$ doit se lire $((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg r))$

- Deux connecteurs ont meme priorite, et en absence de parentheses, l'associativite se fait de gauche a droite.

Exemple

$p \Rightarrow q \Rightarrow r$ doit se lire $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$

Formalisation d'un problème

Règlement d'un club On donne le règlement d'un club suivant :

1. Les membres de la direction financière sont choisis dans les membres de la direction générale
2. Nul ne peut être à la fois membre de la direction générale et de la direction de la bibliothèque, s'il n'est pas membre de la direction financière
3. Aucun membre de la direction de la bibliothèque ne peut être membre de la direction financière.

Symbolisation

- $f \equiv$ "être membre de la direction financière"
- $g \equiv$ "être membre de la direction générale"
- $b \equiv$ "être membre de la direction de la bibliothèque"

1. $f \Rightarrow g$
2. $(g \wedge b) \Rightarrow f$
3. $b \Rightarrow \neg f$

Il faut que 1 et 2 et 3 soient vraies : $(f \Rightarrow g) \wedge ((g \wedge b) \Rightarrow f) \wedge (b \Rightarrow \neg f)$

Définitions

Définition

On appelle valuation d'un ensemble de variables propositionnelles $v \subseteq v(\mathcal{L})$, une fonction $m : v(\mathcal{L}) \to \{V, F\}$

Définition

Une interprétation d'une formule dans laquelle apparaissent les variables propositionnelles $v_1, ..., v_n$ est une valuation de $\{v_1, ..., v_n\}$.

Définition

Une interprétation I est un modèle d'une formule φ si elle est vrai.

Tables de vérité des connecteurs (1/3)

- On définit l'interprétation associée à chaque connecteur grâce aux tables de vérité
- Négation : $\neg p$

p	$\neg p$
1	0
0	1

- Conjonction : $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tables de vérité des connecteurs(2/3)

- Disjonction : $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- Implication : $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tables de vérité des connecteurs(3/3)

- Équivalence : $p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exemple : $\varphi \equiv (p \wedge q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow (\neg s))$ (2^4 entrées)

p	q	r	s	$\neg s$	$p \wedge q$	$r \Leftrightarrow \neg s$	φ
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0	0

Tautologie ou formule valide

Définition

Une formule valide, ou tautologie, est une formule φ vraie quelles que soient les valeurs de vérité des atomes qui la composent (i.e. vraie dans toute interprétation). On la note $\models \varphi$

- Exemple : $p \vee \neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

Formule insatisfiable

Définition

Une formule insatisfiable, ou sémantiquement inconsistante, ou encore antitautologie, est une formule fausse dans toute interprétation.

- Exemple : $p \vee \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	0
0	1	0

Formules satisfiables

Définition

Une formule satisfiable ou sémantiquement consistante est une formule vraie dans au moins une interprétation.

Conséquence logique

Définition

Une formule φ est une conséquence logique d'un ensemble de formules $\{\varphi_1, \ \varphi_2, ..., \ \varphi_n\}$ noté $\{\varphi_1, \ \varphi_2, ..., \ \varphi_n\} \models \varphi$ ssi toute interpretation I qui est vrai pour chaque φ_1, est vrai pour φ

Théorème

$\{\varphi_1, \ \varphi_2, ..., \ \varphi_n\} \models \varphi$ *ssi* $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ *est valide*

Théorème

$\{\varphi_1, \ \varphi_2, ..., \ \varphi_n\} \models \varphi$ *ssi* $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi$ *est insatisfiable*

Équivalence des formules bien formées

Définition

Deux formules sont equivalentes quand elles ont meme valeur dans toutes interpretation. On note $A \equiv B$).

- une formule φ est équivalente à une formule ψ, noté $\varphi \equiv \psi$ si la formule $\varphi \Leftrightarrow \psi$ est valide.
- En interprétant la relation $\equiv$ comme une égalité, on peut considérer les connecteurs logiques comme des opérateurs sur l'ensemble des fbf.
- Il est souvent nécessaire de transformer une formule en une autre équivalente. Certaines formes, appelées formes normales, sont particulièrement intéressantes.

Équivalence des formules bien formées

Définition

On note $\tau_{p \leftarrow \varphi}$ la formule obtenue en substituant dans la formule (fbf) τ toutes les occurrences du symbole propositionnel p par la fbf φ.

Théorème

Soit la formule τ contenant les atomes $p_1, p_2, ..., p_n$. Soit la formule τ' obtenue en substituant aux atomes $p_1, p_2, ..., p_n$ les formules $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$. Alors si $\models \tau$, on a $\models \tau'$.

Règles de transformation (1/2)

Deux formules particulières notées par

- $\top$ formule toujours valide
- $\perp$ formule toujours fausse.

- Implication
  - $\varphi \Leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$
  - $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
  - $\neg(\varphi \Rightarrow \psi) \equiv \varphi \wedge \neg\psi$
- Idempotence
  - $\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$
  - $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$
- Commutativité
  - $\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$
  - $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$
- Associativité
  - $(\varphi \vee \psi) \vee \xi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \xi)$
  - $(\varphi \wedge \psi) \wedge \xi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \xi)$

Règles de transformation (2/2)

- Distributivité
  - $\varphi \vee (\psi \wedge \xi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \xi)$
  - $\varphi \wedge (\psi \vee \xi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \xi)$
- Lois de de Morgan
  - $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$
  - $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$
- Élément neutre
  - $\varphi \vee \perp \equiv \varphi$
  - $\varphi \wedge \top \equiv \varphi$
  - $\varphi \vee \top \equiv \top$
  - $\varphi \wedge \perp \equiv \perp$
- Complémentarité
  - $\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \perp$
  - $\varphi \vee \neg\varphi \equiv \top$
- Involution
  - $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

Formes normales conjonctives

Définition

(Littéral) Un littéral est un atome ou la négation d'un atome.

Définition

(Forme normale conjonctive) Une formule φ est en forme normale conjonctive (fnc) ssi elle s'écrit comme une conjonction de disjonctions de littéraux. $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$, $n \geq 1$.

- $\varphi \equiv (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q)$ est fnc.
- $\psi \equiv p \vee \neg(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ n'est pas en fnc.

Formes normales conjonctives

Définition

Une clause est une formule qui a la forme d'une disjonction de littéraux

- Exemple : $p \vee \neg q \vee r$

Définition

Une clause de Horn est une clause comportant au plus un littéral positif

- Exemple : $p \vee \neg q$, $p \vee \neg q \vee \neg r$, $\neg q \vee \neg r$, p

Définition

Une formule φ sous forme clausale pourra être représentée par un ensemble de clauses : $\varphi = C_1 \wedge ... \wedge C_n$ ou $\varphi = \{C_1, ..., C_n\}$

Formes normales disjonctives

Définition

(Forme normale disjonctive) Une formule φ est en forme normale disjonctive (fnd) ssi elle s'écrit comme une disjonction de conjonctions de littéraux. $\varphi \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n$, $n \geq 1$.

- $\varphi \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ est en fnd.
- $\psi \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ n'est pas en fnd.

Algorithme de transformation

Étape 1 : Utiliser les lois suivantes pour éliminer les connecteurs logique $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

- $\varphi \Leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$
- $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

Étape 2 : Ramener les signes de négation immédiatement avant les atomes en utilisant de manière répétée les règles :

- $\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$
- les lois de De Morgan
  - $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$
  - $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

Étape 3 : Utiliser les lois pour obtenir la forme normale désirée

- $\varphi \vee (\psi \wedge \xi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \xi)$
- $\varphi \wedge (\psi \vee \xi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \xi)$

Exemple

$$p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$$

1. Remplacer l'équivalence :
$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \wedge ((q \Rightarrow r) \Rightarrow p)$$
2. Remplacer les implications :
$$(\neg p \vee (\neg q \vee r)) \wedge (\neg(\neg q \vee r) \vee p)$$
3. Faire traverser à la négation les parenthèse :
$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee p)$$
4. Appliquer la distributivité de $\vee$:
$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge ((q \vee p) \wedge (\neg r \vee p))$$
5. Regrouper :
$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee p) \wedge (\neg r \vee p) \ \textbf{fnc}$$

Système formel (déductif)

- En logique, on cherche à démontrer des théorèmes (tautologies) :
  - la sémantiqure (couteux)
  - Un moyen mécanique qui ne travaille que sur la syntaxe des formules $\Rightarrow$ un système déductif (ou formel) qui permet donc de mécaniser le raisonnement.
- Un système formel de déduction de la logique classique est composé :
  - des axiomes qui représentent un petit nombre de vérités initiales
  - des règles de déduction (d'inférence) qui sont les mécanismes de raisonnement pour révéler des vérités cachées.
- il permet d'inférer des conclusions à partir de prémisses et définit donc une relation de déduction entre formules

Règle de résolution

- Le principe de résolution est formé d'une unique règle d'inférence.
- Règle de résolution $\frac{c_1 : \varphi \vee P, c_2 : \neg P \vee \psi}{c_3 : \varphi \vee \psi}$ (RR)
  avec
  - φ et ψ sont des disjonctions de littéraux
  - c_3 est dite résolvante de c_1 et c_2
  - P et $\neg P$ sont des littéraux complémentaires

Exemples

- $\dfrac{c_1 : P \vee R, c_2 : \neg P \vee Q}{c_3 : R \vee Q}$ (RR)
- $\dfrac{c_1 : \neg P \vee Q \vee R, c_2 : \neg S \vee \neg Q}{c_3 : \neg P \vee R \vee \neg S}$ (RR)
- $c_1 : \neg P \vee Q,\ c_2 : \neg P \vee R$ il n'y a aucun résolvant pour c_1 et c_2.

Remarque

Si on est en présence de deux clauses unitaires alors leurs résolvant s'il existe est la clause vide $\square$.

Résolution

Théorème

Etant donné deux clauses c_1 et c_2, un résolvant c de c_1 et c_2 est une conséquence logique de c_1 et c_2. $\{c_1, c_2\} \models c$

Définition

Soit S un ensemble de clauses, une déduction (résolution) de c à partir de S est une séquence $c_1, c_2, ..., c_k$ où chaque c_i est soit une clause de S soit un résolvant de clauses précédent c_i et $c = c_k$

Exemple

- $\{p \vee q \vee r, \neg p \vee r \vee q, \neg q \vee r\} \models r$
  grâce à la déduction :

$$
\begin{array}{lll}
c_1 : \{p \vee q \vee r & & (\mathrm{HYP}) \\
c_2 : \neg p \vee r \vee Q & & (\mathrm{HYP}) \\
c_3 : \neg q \vee r & & (\mathrm{HYP}) \\
c_4 : q \vee r & & (\mathrm{RR})(c_1, c_2) \\
c_5 : r & & (\mathrm{RR})(c_3, c_4)
\end{array}
$$

Résolution par réfutation

- Pour résoudre un problème de logique par la méthode de résolution, on s'appuie sur le théorème de réfutation
- Pour prouver que H est une consequence logique de G :
  - On transforme G et $\neg H$ en ensemble de clauses
  - On applique le principe de resolution a $G \wedge \neg H$ jusqu'à trouver la clause vide
- Exemple : $\{p \vee q \vee r, \neg p \vee r \vee q, \neg q \vee r\} \models r$
  revient à monter :
  $\{p \vee q \vee r, \neg p \vee r \vee q, \neg q \vee r, \neg r\} \models \square$

$c_1 : p \vee q \vee r$	(HYP)
$c_2 : \neg p \vee r \vee q$	(HYP)
$c_3 : \neg q \vee r$	(HYP)
$c_4 : \neg r$	(HYP)
$c_5 : q \vee r$	(RR)(c_1, c_2)
$c_6 : r$	(RR)(c_3, c_5)
$c_7 : \square$	(RR)(c_4, c_6)

Exercice

On suppose que l'on a les règles et faits suivants :

- Si Pierre rate son tournoi alors Pierre sera déprimé.
- S'il fait beau alors Pierre ira à la piscine.
- Si Pierre ne va pas à la piscine il sera déprimé.
- A la piscine, Pierre ne s'entraîne pas.
- Pierre ratera son tournoi s'il ne s'entraîne pas.

Questions :

1. Modéliser l'énoncé à l'aide de formules de la logique propositionnelle.
2. Prouver que Pierre sera déprimé.