CINEMATIQUE - Mouvement plan

(translation et rotation rappels, équiprojectivité, CIR, composition des vitesses)

1. Introduction

Définition :

Un solide est en mouvement plan lorsque tous les points de celui-ci se déplacent dans des plans parallèles entre eux. Un mouvement plan peut être considéré comme l'addition d'une translation et d'une rotation.

2. Mouvements plans particuliers

2-1 Mouvement de translation rappel

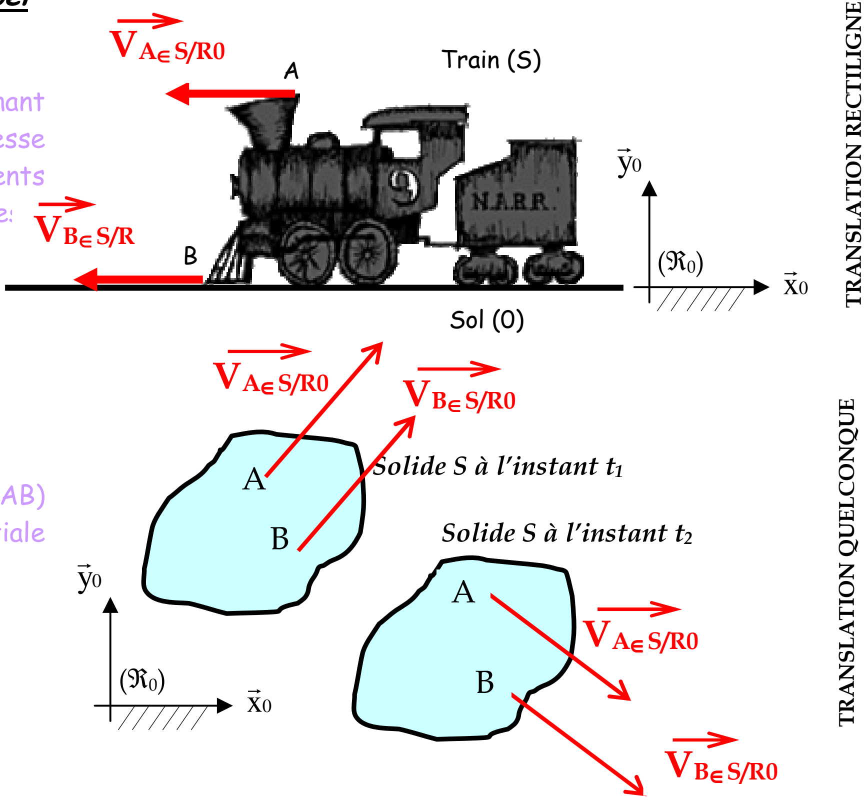
Un solide est en translation si :

- Déf.1 : Quel que soit A, B appartenant à S, à chaque instant tous les vecteurs vitesse d'un solide en translation sont équipollents (même norme, même sens, supports parallèles)

$$\boxed{\forall A, B \in S \quad \vec{V}_{A\in S/R0} = \vec{V}_{B\in S/R0}}$$

ou

- Déf.2 : Si n'importe quel bipoint (AB) du solide reste parallèle à sa position initiale au cours du mouvement.



2-2 Mouvement de rotation rappel

Un solide est en rotation si tous ces points décrivent des cercles concentriques centrés sur l'axe du mouvement.

$\vec{V}_{M\in R/R0} \perp OM$ (le vecteur vitesse est tangentiel à la trajectoire)

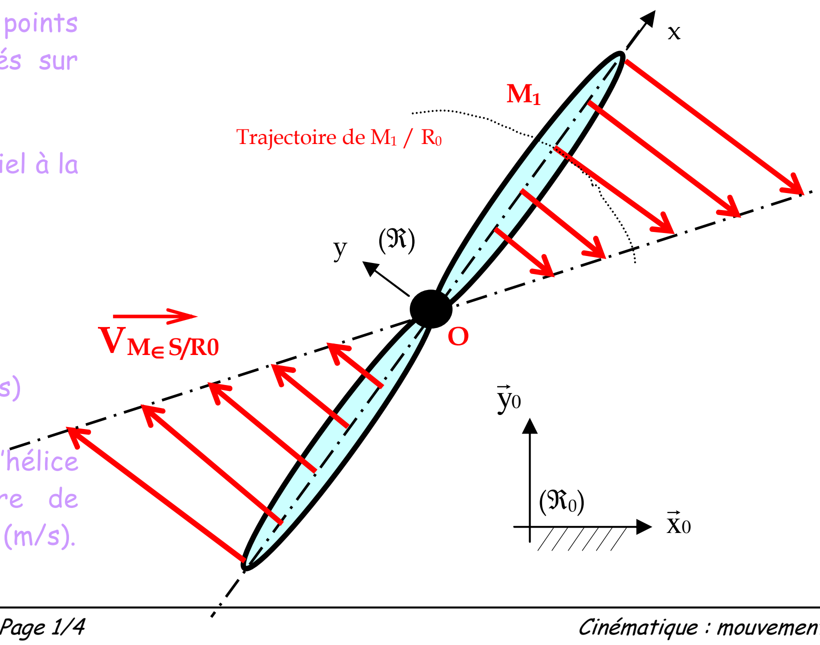
$$\boxed{V_{M\in R/R0} = R \times \omega}$$

avec

ω : Vitesse angulaire en radian/seconde (rad/s)

R : Rayon OM en mètre

$V_{M\in R/R0}$: Vitesse linéaire d'un point M de l'hélice appartenant au repère R dans le repère de référence R_0 exprimée en mètre par seconde (m/s).



3. Mouvements plans quelconques

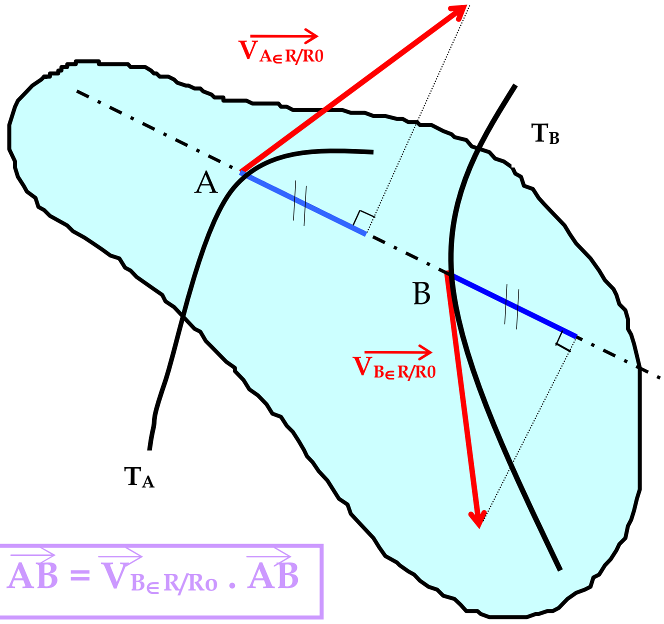
3-1 Equiprojectivité

La propriété d'équiprojectivité est l'une des propriétés les plus importantes de la cinématique du solide.

Théorème :

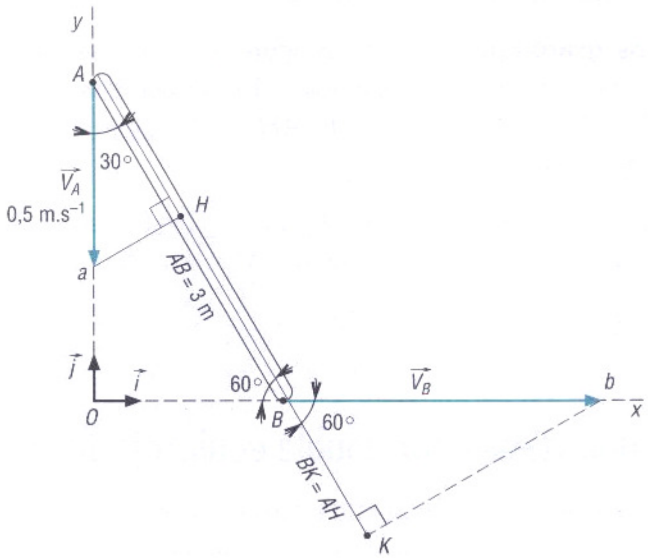
Si A et B sont deux points distincts d'un solide, la projection orthogonale de la vitesse de A sur (AB) est égale à la projection orthogonale de la vitesse de B sur (AB).

L'utilisation de ce théorème ne s'applique que si les deux points A et B appartiennent au même solide.



$$\boxed{\overrightarrow{V_{A\in R/Ro}} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{B\in R/Ro}} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

Exemple : l'échelle *Voir Animation*



L'échelle est appuyée en A sur un mur et en contact avec le sol en B. Elle glisse en A vers le bas à la vitesse de 0,5 m/s. Déterminer graphiquement grâce à la propriété d'équiprojectivité la vitesse en B sachant que celle-ci appartient au plan du sol (direction x).

Réponse : $V_B \approx 0.86$ m/s

Par le calcul : $V_A \cdot \cos 30 = V_B \cdot \cos 60$
$0.5 \cos 30 = V_B \cdot 0.5$
$V_B = \cos 30 = 0.866$

3-2 Centre instantané de rotation (C.I.R)

Théorème :

A chaque instant du mouvement plan d'un solide, il existe un point I de ce plan, et un seul, ayant une vitesse nulle, ce point est appelé centre instantané de rotation (C.I.R.).

Soient deux points A et B appartenant à (S) en déplacement par rapport à Ro.

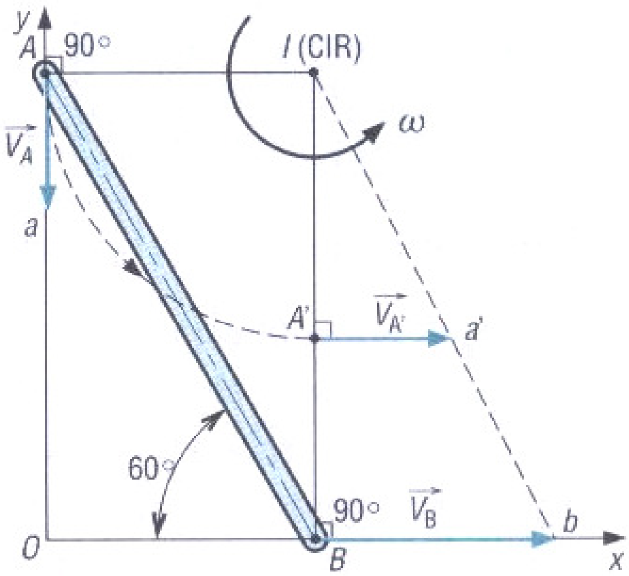
- Le centre instantané de rotation se trouve à chaque instant sur la normale à la trajectoire T_A d'un point quelconque $A_{(\in R/Ro)}$.
- Il est situé également sur la normale à la trajectoire T_B d'un point quelconque $B_{(\in R/Ro)}$.

⇒ Le C.I.R. se trouve donc à l'intersection des normales aux vecteurs vitesses $\overrightarrow{V_{A\in R/Ro}}$ et $\overrightarrow{V_{B\in R/Ro}}$. Il permet de déterminer graphiquement la vitesse d'un point quelconque de (S) à l'instant t, à partir d'une vitesse connue.

En conclusion : Pour connaître entièrement le champ des vitesses d'un solide en mouvement plan, il suffit de connaître le vecteur vitesse d'un point et la direction du vecteur vitesse d'un autre point.

Exemple : L'échelle *Voir Animation*

Reprenons l'exemple de l'échelle de longueur AB=3m qui glisse en A avec une vitesse de 0,5 m/s.



Déterminer graphiquement par la méthode du CIR la vitesse en B sachant que celle-ci appartient au plan du sol (direction x).

Réponse : $V_B \approx 0.86$ m/s

Par le calcul :

$V_B/IB = V_A/IA = V_{A'}/IA' = \omega$

Avec IA = IA' = AB.cos 60 = 1,5 m

IB = AB.sin60 = 2,6 m

$\omega = V_A/IA = 0,5/1,5 = 0,33$ rd/s

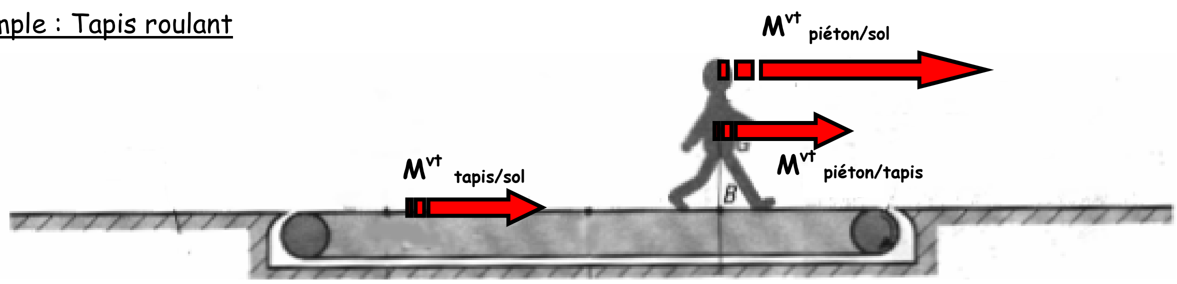
$V_B = 0,33 \times 2,6 = 0,866$ m/s

4. *Composition des vecteurs vitesses*

Soit un solide en mouvement plan par rapport à deux repères R1 et Ro. Le vecteur vitesse du point $M_{\in S/Ro}$ est égale à la somme du vecteur vitesse de $M_{\in S/R1}$ et du vecteur vitesse de $M_{\in R1/Ro}$

$$\boxed{\vec{V}_{M\in S/Ro} = \vec{V}_{M\in S/R1} + \vec{V}_{M\in R1/Ro}}$$

Exemple : Tapis roulant



Il y a **composition des mouvements** entre:

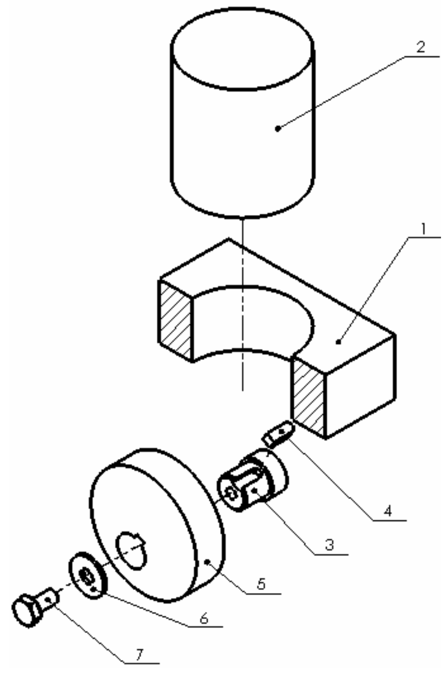
- Le mouvement du piéton par rapport au tapis: M^{vt} piéton / tapis
- Le mouvement du tapis par rapport au sol: M^{vt} tapis / sol
- Le mouvement du piéton par rapport au sol: M^{vt} piéton / sol

$$\boxed{M^{vt}_{\text{piéton/sol}} = M^{vt}_{\text{piéton/tapis}} + M^{vt}_{\text{tapis/sol}}}$$

On peut donc aussi dire que la vitesse du piéton par rapport au sol est la composée des deux autres :

$$\boxed{\vec{V}_{\text{piéton/sol}} = \vec{V}_{\text{piéton/tapis}} + \vec{V}_{\text{tapis/sol}}}$$

Exemple : Came



La came 5, entraînée en B par un arbre moteur, pousse en A un poussoir 2 en liaison glissant par rapport au bâti 1. La liaison entre 5 et 1 est une liaison pivot. La fréquence de rotation de la came 5 est de 1480 tr/min.

Q1) Calculer $\left\|\overrightarrow{V_{A\,5/1}}\right\|$

$\left\|\overrightarrow{V_{A\,5/1}}\right\| = \omega_{5/1}.AB$ et $\omega_{5/1} = \dfrac{\pi.N_{5/1}}{30}$

$\left\|\overrightarrow{V_{A\,5/1}}\right\| = \dfrac{\pi.N_{5/1}}{30}.AB = \dfrac{\pi.1480}{30}.0{,}024 = 3{,}72\ m.s^{-1}$

Q2) Construire le vecteur $\overrightarrow{V_{A\,5/1}}$ pour une échelle de 1 cm $\rightarrow$ 1 m/s

soit $\dfrac{3{,}72}{1} \approx 3{,}7\ cm$

Q3) Construire $\overrightarrow{V_{A\,2/1}}$ et $\overrightarrow{V_{A\,5/2}}$

$\overrightarrow{V_{A\,5/1}} = \overrightarrow{V_{A\,5/2}} + \overrightarrow{V_{A\,2/1}}$

Q4) Evaluer $\left\|\overrightarrow{V_{A\,2/1}}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{V_{A\,5/2}}\right\|$

On mesure 1,27 cm

soit $\left\|\overrightarrow{V_{A\,2/1}}\right\| \approx 1{,}27 \times 1 \approx 1{,}27\ m.s^{-1}$

On mesure 3,49 cm

soit $\left\|\overrightarrow{V_{A\,5/2}}\right\| \approx 3{,}49 \times 1 \approx 3{,}49\ m.s^{-1}$